Nichtlineare Störungen linearer elliptischer Randwertprobleme im Resonanzfall

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der
Universität Zürich

von

Conrad Steinemann
von Hagenbuch ZH

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. P. Hess

1979

Zürich 1978
Zentralstelle der Studentenschaft - awd

Nichtlineare Störungen linearer elliptischer Randwertprobleme im Resonanzfall

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der
Universität Zürich

von

Conrad Steinemann
von Hagenbuch ZH

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. P. Hess

Zürich 1978
Zentralstelle der Studentenschaft - awd

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

Bezeichnungen 5

I. Anwendung einer Lyapunow-Schmidt Methode auf ein stark nichtlineares Randwertproblem

1. Das Problem 7

2. Die Gleichung im Cokern von L 10

3. Die Gleichung im Kern von L und ein Existenzsatz 16

4. Existenz von mehreren Lösungen 23

5. Die Gleichung $Au - \lambda u + e^{u} = f$ 28

II. Zur Frage der Abgeschlossenheit der Wertemenge bei beschränkten nichtlinearen Störungen

1. Eine hinreichende Bedingung für die Abgeschlossenheit 38

2. Die Bedingung in 1. ist "fast notwendig" 45

Anhang 53

Literaturverzeichnis 56

Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir nichtlineare Randwertprobleme der Form

$$Lu + g(u) = f \quad \text{in} \quad \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \;.$$

Dabei ist Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^N$ mit glattem Rand $\partial\Omega$, und L bezeichnet einen linearen, stark elliptischen, formal selbstadjungierten Differentialausdruck zweiter Ordnung mit Null als erstem Eigenwert unter Dirichlet-Randbedingungen. Ferner ist g eine stetige Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Im Teil I befassen wir uns mit einem stark nichtlinearen Problem. Das Problem heisst stark nichtlinear, weil die Funktion g beliebiges Wachstum haben kann. Wir verlangen lediglich, dass g eine Vorzeichenbedingung erfüllt. Wir lösen dieses Problem mit Hilfe einer globalen Lyapunow-Schmidt Methode, d.h. wir zerlegen die Gleichung in ein aequivalentes System von zwei Gleichungen: In eine Gleichung im Cokern von L und in eine Gleichung im Kern von L.
Ambrosetti und Mancini untersuchten in ihren Arbeiten [1] und [2] ein ähnliches Problem. L kann bei ihnen von höherer Ordnung sein. Dafür müssen sowohl die Funktion g als auch die Ableitung g' von g gewisse Wachstumsbedingungen erfüllen. Auf Grund dieser Wachstumsbedingungen erhalten sie die stetige Differenzierbarkeit des der Funktion g zugeordneten Nemytskii-Operators im Sobolev-Raum $H^{m,2}(\Omega)$. Damit können sie das Problem als Funktionalgleichung im Hilbertraum $H_o^{m,2}(\Omega)$ formulieren. Mit Hilfe des

impliziten Funktionentheorems erhalten sie, dass die Lösung der Gleichung im Cokern von L stetig differenzierbar vom vorgegebenen Element aus dem Kern von L abhängt. Die Lyapunow-Schmidt Methode kann daher problemlos angewandt werden.
Bei starken Nichtlinearitäten g ist nun g(u) für u aus $L^2(\Omega)$ im allgemeinen keine L^2-Funktion mehr. Unter Ausnützung einer Existenzaussage über variationelle Ungleichungen von P. Hess [7] können wir die Gleichung im Cokern von L lösen, wobei g(u) noch eine L^1-Funktion ist (Satz 2.3). Entscheidend für das Gelingen der Lyapunow-Schmidt Methode ist das Lemma 2.5, das die Eindeutigkeit der Lösung im Cokern von L zeigt, sowie Satz 3.1, der die stetige Abhängigkeit dieser Lösung vom vorgegebenen Element aus dem Kern von L garantiert. Falls die Funktion g im Nullpunkt stetig differenzierbar ist, erhalten wir sogar eine differenzierbare Abhängigkeit (Lemma 4.1). Damit können wir für gewisse f die Existenz von mehreren Lösungen beweisen (Theorem 4.2).
Der Paragraph fünf zeigt die Anwendbarkeit dieser Methode auf die Gleichung

$$Lu - \lambda u + e^u = f \qquad \text{in} \quad \Omega$$
$$u = 0 \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega .$$

Dabei sei $\lambda \leqq \lambda_2$ und λ_2 der zweite Eigenwert von L mit Dirichlet-Randbedingungen. Falls f aus $L^\infty(\Omega)$ ist, wurde diese Gleichung von McKenna [12] untersucht. In einer neueren Arbeit von P. Hess und B. Ruf [10] gelingt dazu eine Verallgemeinerung für beliebige λ. Da für f aus $L^\infty(\Omega)$ eine Lösung u notwendigerweise

wesentlich beschränkt ist, können sie ein aequivalentes Problem betrachten, dessen Nichtlinearität nur noch lineares Wachstum hat. Wir betrachten hier den Fall, wo f eine L^2-Funktion ist, und daher das Problem nicht mehr derart modifiziert werden kann. Mit unserer Methode können wir zudem zeigen, dass die Menge der f, für die die obige Gleichung lösbar ist, in $L^2(\Omega)$ abgeschlossen ist.

Der II. Teil behandelt die analoge Frage der Abgeschlossenheit des Bildes in $L^2(\Omega)$ bei beschränkter Funktion g. Angeregt zu dieser Fragestellung wurden wir durch eine Arbeit von Landesman und Lazer [13], die eine Reihe von Erweiterungen nach sich zog. Man vergleiche zum Beispiel die Arbeit von Brézis und Nirenberg [4] sowie die Referenzen darin. Sie geben alle eine Charakterisierung des Innern des Bildes oder des Abschlusses des Bildes an.

In einer Arbeit von P. Hess [9] sind nun hinreichende Bedingungen für die Abgeschlossenheit des Bildes angegeben. Im ersten Paragraphen formulieren wir einen direkten Beweis für dieses Resultat. Im zweiten Paragraphen geben wir dann Beispiele an, die zeigen, dass diese Bedingungen "fast notwendig" sind.

Bezeichnungen

Ω bezeichnet ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) mit genügend glattem Rand $\partial\Omega$.

Ist V ein normierter Raum, dann bezeichnet V* den topologischen Dualraum von V. Für die Dualitätspaarung (f,v) aus V*×V schreiben wir $(f,v)_V$. Sofern keine Verwechslung möglich ist, lassen wir den Index V weg. Konvergenz in der starken bzw. schwachen bzw. schwach-*-Topologie wird mit " $\longrightarrow$ " bzw. " $\rightharpoonup$ " bzw. " $\overset{*}{\rightharpoonup}$ " bezeichnet.

$L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, bezeichnet den Banachraum der reellwertigen messbaren und p-fach integrierbaren (bzw. wesentlich beschränkten, falls $p = +\infty$) Funktionen (Aequivalenzklassen) auf Ω.

Mit $H^{m,p}(\Omega)$ wird die Vervollständigung des normierten Raumes $C^\infty(\bar{\Omega})$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \Big)^{1/p}$$

bezeichnet. Der Multiindex $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$ ist ein N-Tupel von nichtnegativen ganzen Zahlen. Mit $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq N$, ist dann $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_N^{\alpha_N}$ ein Differentialoperator der Ordnung

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \, .$$

$H_o^{m,p}(\Omega)$ bezeichnet die Vervollständigung des normierten Raumes $C_o^\infty(\Omega)$ bezüglich der $H^{m,p}(\Omega)$-Norm.

Im Fall $p = 2$ schreiben wir kürzer $H^m(\Omega)$ für $H^{m,2}(\Omega)$ und $H_o^m(\Omega)$ für $H_o^{m,2}(\Omega)$.

I. Anwendung einer Lyapunow-Schmidt Methode auf ein stark nichtlineares Randwertproblem

1. Das Problem

Wir betrachten das nichtlineare Dirichlet-Problem

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} (Au)(x) - \lambda_1 u(x) + g(u(x)) &= f(x) \qquad && x \in \Omega \\ u(x) &= 0 && x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

A ist ein linearer, stark elliptischer Differentialausdruck

der Form $\qquad A := - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j})$

mit $a_{ij} = a_{ji}$, $\qquad a_{ij} \in L^\infty(\Omega) \qquad (i,j = 1,\dots,N)$

und es existiere eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq c|\xi|^2 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ f.ü. in } \Omega.$$

λ_k bezeichne den k-ten Eigenwert von $Au = \lambda u$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

Die Funktion $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig mit den Eigenschaften:

(g.1) Es existiere eine Konstante $c_o > 0$, so dass

$g(s)s \geqq 0 \qquad \forall\, |s| \geqq c_o$.

(g.2) Der Grenzwert $\lim\limits_{s\to s_o} \frac{g(s)-g(s_o)}{s-s_o}$ existiere in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

und sei grösser als $-(\lambda_2 - \lambda_1 - \varepsilon) \qquad \forall\, s_o \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0.$

<u>Bemerkung</u>: Wir benötigen die Differenzierbarkeit der Funktion g nur, um den Mittelwertsatz anwenden zu können. Dieser gilt aber

auch für eine Funktion, deren Ableitung den Wert $\pm\infty$ annehmen kann. Man beachte, dass weder an g noch an die Ableitung g' von g eine Wachstumsbedingung gestellt wird.

Im Folgenden arbeiten wir mit den Bezeichnungen:

$H = L^2(\Omega)$, $V = H_o^1(\Omega)$, $W = H_o^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ versehen mit der von $H_o^1(\Omega)$ induzierten Norm.

$a: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ sei die dem formalen Differentialausdruck A zugeordnete beschränkte Bilinearform, definiert durch:

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Somit können wir einen linearen, beschränkten Operator $L: V \longrightarrow V^*$ definieren durch: $(Lu,v) = a(u,v) - \lambda_1 (u,v)_H$.
Die Eigenwerte von $Au = \lambda u$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$ sind Lösungen des Problems

$$u \in V: \quad a(u,v) - \lambda(u,v)_H = 0 \quad \forall \quad v \in V.$$

Sie haben endliche Vielfachheit und bilden eine aufsteigende, unbeschränkte Folge $0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$. Die variationelle Charakterisierung des k-ten Eigenwertes lautet:

$$\lambda_k = \min \left\{ \frac{a(u,u)}{\|u\|_H^2} \Big/ \quad u \in V, \ (u,v_i)_H = 0 \quad i = 1,\ldots,k-1 \right\}$$

v_i ist Eigenfunktion zum i-ten Eigenwert.
Wir wissen, dass der Kern von L, N(L), eindimensional ist und von einer Funktion erzeugt wird, die das Vorzeichen nicht wechselt (vgl. M. Chicco [5]). $N(L) = \{ tv_1 \ / \ t \in \mathbb{R} \}$
Wir normieren v_1 in H zu $\|v_1\|_H = 1$ und nehmen an, dass $v_1(x) > 0$ für fast alle $x \in \Omega$. Ferner gilt, dass $v_1 \in W$.

Dies folgt aus Regularitäts- und Einbettungssätzen.

Da die Funktion g beliebiges Wachstum haben kann, können wir ihr keinen Nemytskii-Operator in H zuordnen. Wir wollen daher definieren, was wir unter einer schwachen Lösung des Randwertproblems (I) verstehen.

Wir setzen $V_o := \{v \in V \,/\, g(v) \in L^1(\Omega),\ \ g(v)v \in L^1(\Omega)\}$.

Definition 1.1: Für ein gegebenes $f \in V^*$ heisst v schwache Lösung von (I), wenn

(i) $v \in V_o$

(ii) $(Lv,w) + \int_\Omega g(v)w\,dx = (f,w) \qquad \forall\ w \in W$

Wir zerlegen H in den Kern von L und sein L^2-Orthogonalkomplement: $H = H_1 \oplus H_2$, wo $H_1 = N(L)$ und $H_2 = (N(L))^\perp$.

Ferner führen wir die Bezeichnungen ein:

$V_1 = V \cap H_1,\ \ V_2 = V \cap H_2,\ \ W_1 = W \cap H_1,\ \ W_2 = W \cap H_2$.

Jedes $v \in V$ hat die eindeutige Darstellung $v = tv_1 + u$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in V_2$. Die Gleichung (ii) der Definition 1.1 ist somit aequivalent zum Gleichungssystem

$$(1.1) \qquad (Lu,w_2) + \int_\Omega g(tv_1 + u)w_2dx = (f,w_2) \qquad \forall\ w_2 \in W_2$$

$$(1.2) \qquad \int_\Omega g(tv_1 + u)w_1dx = (f,w_1) \qquad \forall\ w_1 \in W_1$$

In einem ersten Schritt lösen wir für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung (1.1), die wir als Gleichung im Cokern von L bezeichnen. Wir werden also jedem $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung u_t der Gleichung (1.1) zuordnen. Hernach müssen wir nur noch die Gleichung $\int_\Omega g(tv_1 + u_t)v_1dx = (f,v_1)$ in $\mathbb{R}$ lösen, da $w_1 = sv_1$, $s \in \mathbb{R}$.

2. Die Gleichung im Cokern von L

Sei also $t \in \mathbb{R}$ eine beliebige, fest gewählte reelle Zahl. Die Lösbarkeit der Gleichung (1.1) zu diesem t folgt aus einer allgemeinen Existenzaussage über variationelle Ungleichungen. Siehe dazu P. Hess [7]. Wir wollen die Resultate aus [7], auf unseren Fall bezogen, formulieren.

V ist ein reflexiver Banachraum, W ein normierter Raum bezüglich der V-Norm, der stetig in V eingebettet ist. Wir definieren den nichtlinearen Operator

$$T := \tilde{L} + \tilde{G}: \quad V \supset D(T) \longrightarrow W^* \quad \text{durch:}$$

(1) $\tilde{L}: V \longrightarrow W^*$ ist gegeben durch $\tilde{L}v := Lv/_W$. $Lv/_W$ ist die Restriktion des Funktionals $Lv \in V^*$ auf den Unterraum $W \subset V$.

(2) $\tilde{G}$ wird erzeugt von

$\tilde{g}: \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,s) \longmapsto \tilde{g}(x,s) := g(tv_1(x) + s)$.

$\tilde{g}$ genügt den Bedingungen:

(i) Caratheodory-Bedingung, d.h. $\tilde{g}$ ist stetig in s für fast alle $x \in \Omega$ und messbar in x für alle $s \in \mathbb{R}$.

(ii) $\tilde{g}(x,s)s \geqq 0 \quad \forall\ |s| \geqq c_t$, f.ü. in Ω

$c_t = c_o + C_t$, wo $C_t = \|tv_1\|_{L^\infty(\Omega)}$.

(iii) $\underset{|s| \leqq \tau}{\text{essup}} |\tilde{g}(x,s)| < \infty$, $\forall\ \tau > 0$.

Als Definitionsbereich von T setzen wir

$D(T) = \{ v \in V \,/\, \tilde{g}(.,v) \in L^1(\Omega), \ \ \tilde{g}(.,v)v \in L^1(\Omega)\}$.

Es ist klar, dass $W \subset D(T)$ und

$$\int_\Omega \tilde{g}(.,v)w\,dx < \infty \quad \forall \ v \in D(T), \quad \forall \ w \in W .$$

Somit ist für $v \in D(T)$, beliebig, das lineare Funktional:

$w \longmapsto \int_\Omega \tilde{g}(.,v)w\,dx$ beschränkt auf W. Also existiert ein $v^* \in W^*$,

so dass $(v^*,w)_W = \int_\Omega \tilde{g}(.,v)w\,dx \quad \forall \; w \in W$. Damit können wir die

Abbildung $\tilde{G}: V \supset D(T) \longrightarrow W^*$ wie folgt definieren:

$(\tilde{G}(v),w)_W = (v^*,w)_W$. Die Abbildung T hat nun folgende Eigenschaften, die in [7] bewiesen sind.

Proposition 2.1

(a) T ist stetig von endlichdimensionalen Unterräumen von W nach W^* bezüglich der schwach-$*$-Topologie von W^*.

(b) Sei $(w_n) \subset W$ mit $w_n \rightharpoonup v$ in V und $(Tw_n,w_n) \leqq$ const. für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $v \in D(T)$, $Tw_n \overset{*}{\rightharpoonup} Tv$ in W^* und $(Lv,v) + \int_\Omega \tilde{g}(.,v)v\,dx \leqq \liminf_{n\to\infty}(Tw_n,w_n)$.

Beweis: Die Richtigkeit von (a) ist unmittelbar einzusehen.

Sei nun $(w_n) \subset W$ mit $w_n \rightharpoonup v$ in V und $(Tw_n,w_n) \leqq$ const. $\forall$ n.

Da $L: V \longrightarrow V^*$ linear und beschränkt ist, folgt, dass

$Lw_n \rightharpoonup Lv$ in V^*. Insbesondere gilt dann für die Restriktion

$\tilde{L}$ von L auf den Unterraum W, dass $\tilde{L}w_n \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{L}v$ in W^*.

Somit haben wir, dass $(\tilde{G}(w_n),w_n)_W = \int_\Omega \tilde{g}(.,w_n)w_n dx \leqq$ const. $\forall$ n.

Ein bekanntes Resultat von Strauss [16] (vgl. Lemma 4.1 [8]) besagt nun, dass $v \in D(T)$, $\tilde{g}(.,w_n) \longrightarrow \tilde{g}(.,v)$ in $L^1(\Omega)$ und

$\int_\Omega \tilde{g}(.,v)v\,dx \leqq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \tilde{g}(.,w_n)w_n dx$.

Zusammen mit der Monotonie von L folgt hieraus die Behauptung.

q.e.d.

Mit Hilfe dieser beiden Eigenschaften lässt sich das folgende Theorem beweisen.

Theorem 2.2

Sei $K \subset V$ abgeschlossen, konvex mit $0 \in K$. Sei $f \in V^*$ und es existiere eine Konstante $R > 0$, so dass

$$(Tw - f,w) > 0 \quad \forall \quad w \in K \cap W, \quad \|w\|_V = R.$$

Dann existiert ein $u \in K \cap D(T)$, so dass

$$(Tu,w) - (Lu,u) - \int_\Omega \tilde{g}(.,u)u\,dx - (f,w - u) \geqq 0 \quad \forall \quad w \in K \cap W.$$

Beweis: Vgl. Theorem 2 in [7].

Nun sind wir in der Lage, die Existenz einer Lösung der Gleichung (1.1) zu beweisen.

Satz 2.3

Für alle $f \in V^*$ existiert ein $u = u(t,f) \in V_2$, so dass $g(tv_1 + u) \in L^1(\Omega)$, $g(tv_1 + u)u \in L^1(\Omega)$ und

$$(Lu,w) + \int_\Omega g(tv_1 + u)w\,dx = (f,w) \quad \forall \quad w \in W_2 .$$

Beweis: Setzen $K = V_2$, $V_2 \subset V$ ist abgeschlossen, konvex mit $0 \in V_2$. Wir zeigen, dass T auf V_2 koerzitiv ist. Dann existiert sicher zu jedem $f \in V^*$ ein $R > 0$, so dass

$(Tw - f,w) > 0 \quad \forall \quad w \in V_2 \cap W, \quad \|w\|_V = R.$

Annahme: Es existiere eine Konstante $R_o > 0$ und eine Folge

$$(w_n) \subset W_2 \text{ mit } \|w_n\|_V \longrightarrow +\infty \text{ und } (Tw_n,w_n) \leqq R_o\|w_n\|_V \quad \forall \ n.$$

$$(Tw_n,w_n) = a(w_n,w_n) - \lambda_1(w_n,w_n)_H + \int_\Omega g(tv_1 + w_n)w_n dx$$

Weil $tv_1 \in W$ und g die Vorzeichenbedingung (g.1) erfüllt, gilt sicher, dass $\int_\Omega g(tv_1 + w_n)w_n dx \geqq -\text{const.} \quad \forall \; n \in \mathbb{N}.$

Ferner gilt wegen der variationellen Charakterisierung des 2. Eigenwertes von $Au = \lambda u$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$, dass

$a(w_n,w_n) \geqq \lambda_2 \|w_n\|_H^2$, da $w_n \in V_2 \quad \forall \; n$. Somit haben wir, dass

$$a(w_n,w_n) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a(w_n,w_n) - \text{const.} \leqq (Tw_n,w_n) \leqq R_o \|w_n\|_V \quad \forall \; n.$$

Da die Abbildung $|||\cdot|||: V \longrightarrow \mathbb{R}$, $|||v||| = (a(v,v))^{1/2}$ eine Norm auf V definiert, die aequivalent zu $\|\cdot\|_V$ ist, und da $\lambda_1 < \lambda_2$,

$$\text{gilt:} \quad 0 < \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a(w_n,w_n)}{\|w_n\|_V^2} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) - \frac{\text{const.}}{\|w_n\|_V^2} \right) \leqq$$

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \frac{R_o}{\|w_n\|_V} = 0 .$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch ist,

d.h. $\quad \dfrac{(Tw,w)}{\|w\|_V} \longrightarrow +\infty \quad$ für $\|w\|_V \longrightarrow +\infty$, $w \in W_2$.

Nach dem Theorem 2.2 existiert damit ein $u \in D(T) \cap V_2$, so dass

$$(Tu,w) - (Lu,u) - \int_\Omega g(tv_1 + u)u dx - (f,w-u) \geqq 0 \quad \forall \; w \in W_2 .$$

Weil $K \cap W = W_2$ linearer Raum ist, können wir schliessen, dass

$(Tu,w) = (f,w) \quad \forall \; w \in W_2$ (vgl. die Bemerkung nach dem Beweis des Korollars in [7]).

q.e.d.

<u>Bemerkung</u> 2.4: Wenn man den Beweis der Koerzitivität von T auf V_2 betrachtet, sieht man sofort, dass wir folgendes gezeigt haben: $\dfrac{1}{\|w\|_V} \left(a(w,w) - \lambda_1 (w,w)_H + \int_\Omega g(tv_1+w)w dx \right) \longrightarrow +\infty$

für $\|w\|_V \longrightarrow +\infty$, $w \in W_2$, <u>gleichmässig</u> in t für $|t| \leqq$ const.

Die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung (1.1) und eine weitere Eigenschaft der Lösung wollen wir in einem Lemma festhalten.

Lemma 2.5

Die Lösung $u = u(t,f)$ der Gleichung (1.1), die uns der Satz 2.3 garantiert, ist eindeutig und es gilt, dass

$$(Lu,u) + \int_\Omega g(tv_1 + u)u\,dx = (f,u) .$$

Beweis: Als erstes zeigen wir, dass

$$(Lu,u) + \int_\Omega g(tv_1 + u)u\,dx = (f,u) .$$

Sei $M > 0$, wir definieren

$$u^M(x) := \begin{cases} M & , \text{ falls } u(x) > M \\ u(x), & \text{ falls } |u(x)| \leqq M \\ -M & , \text{ falls } u(x) < -M \end{cases}$$

Es ist bekannt, dass u^M Element von V ist, und dass die Folge (u^M) für $M \longrightarrow +\infty$ gegen u in V konvergiert (vgl. Lemma 1.1,[15]). u^M hat die Darstellung $u^M = P_1(u^M) + P_2(u^M)$, wo P_1 bzw. P_2 die L^2- Orthogonalprojektion von H auf H_1 bzw. H_2 ist. Ferner ist $P_1(u^M) = \mu_M v_1$ mit $\mu_M \in \mathbb{R}$. Somit liegt $P_2(u^M)$ in W_2, da $u^M \in W$ und $v_1 \in W_1$. Nach Satz 2.3 gilt demnach

$$(2.1) \qquad (Lu,P_2(u^M)) + \int_\Omega g(tv_1 + u)P_2(u^M)dx = (f,P_2(u^M)), \quad \forall \ M > 0.$$

(u^M) konvergiert punktweise gegen u, also $g(tv_1 + u)u^M \longrightarrow g(tv_1 + u)u$ punktweise. Wegen $u \in D(T)$ gilt, dass $g(tv_1 + u)u \in L^1(\Omega)$. Ferner ist $|g(tv_1 + u)u^M| \leqq |g(tv_1 + u)u|$. Nach dem Satz von Lebesgue folgt hieraus, dass

$$\int_\Omega g(tv_1 + u)u^M dx \longrightarrow \int_\Omega g(tv_1 + u)u\,dx \qquad \text{für } M \longrightarrow +\infty.$$

Da u in V_2 liegt und u^M die Darstellung $u^M = \mu_M v_1 + P_2(u^M)$ hat, konvergiert (μ_M) gegen 0 für M gegen $+\infty$. Also konvergieren die

$$\int_\Omega g(tv_1+u)P_2(u^M)dx = \int_\Omega g(tv_1+u)u^M dx - \mu_M(\int_\Omega g(tv_1+u)v_1 dx)$$

gegen $\int_\Omega g(tv_1+u)udx$ für M gegen $+\infty$.

Ferner konvergieren $(Lu,P_2(u^M))$ gegen (Lu,u) und $(f,P_2(u^M))$ gegen (f,u) für M gegen $+\infty$. Somit können wir auf der rechten und auf der linken Seite der Gleichung (2.1) den Grenzübergang vollziehen und erhalten, dass

$$(Lu,u) + \int_\Omega g(tv_1+u)udx = (f,u) .$$

Wir müssen noch die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung (1.1) zeigen. Seien also u_1 und u_2 Lösungen von (1.1), d.h.

$$(Lu_1,w) + \int_\Omega g(tv_1+u_1)wdx = (f,w) \quad \forall \; w \in W_2$$

$$(Lu_2,w) + \int_\Omega g(tv_1+u_2)wdx = (f,w) \quad \forall \; w \in W_2$$

Wir subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten und erhalten, dass

$$(2.2) \quad (L(u_1-u_2),w) + \int_\Omega [g(tv_1+u_1) - g(tv_1+u_2)]wdx = 0 \quad \forall \; w \in W_2.$$

Wählen $w = P_2((u_1-u_2)^M)$, $M > 0$, und schliessen wie vorhin, dass die Gleichung (2.2) auch für dieses spezielle w erfüllt ist:

$$0 = (L(u_1-u_2),P_2((u_1-u_2)^M)) + \int_\Omega [g(tv_1+u_1)-g(tv_1+u_2)](u_1-u_2)^M dx -$$

$$-\int_\Omega [g(tv_1+u_1)-g(tv_1+u_2)]P_1((u_1-u_2)^M)dx .$$

Wie oben gilt, dass die $(L(u_1-u_2),P_2((u_1-u_2)^M))$ gegen $(L(u_1-u_2),u_1-u_2)$ und die $\int_\Omega [g(tv_1+u_1)-g(tv_1+u_2)]P_1((u_1-u_2)^M)dx$ gegen 0 konvergieren für M gegen $+\infty$.

Nach dem Mittelwertsatz existiert zu fast jedem $x \in \Omega$ ein $\xi(x) \in \mathbb{R}$, so dass $[(g(tv_1+u_1)-g(tv_1+u_2))(x)][(u_1-u_2)^M(x)] =$

$$= g'(\xi(x))\cdot((u_1-u_2)(x))\cdot[(u_1-u_2)^M(x)] \geqq$$

$$\geqq -(\lambda_2-\lambda_1-\varepsilon)\cdot((u_1-u_2)(x))\cdot[(u_1-u_2)^M(x)]$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $((u_1-u_2)(x))\cdot[(u_1-u_2)^M(x)]\geqq 0$ für alle $x \in \Omega$ und wegen (g.2). Also gilt, dass

$$\liminf_{M\to+\infty}\left(\int_\Omega [g(tv_1+u_1)-g(tv_1+u_2)](u_1-u_2)^M dx\right) \geqq -(\lambda_2-\lambda_1-\varepsilon)\|u_1-u_2\|_H^2 .$$

Schliesslich gilt noch wegen der variationellen Charakterisierung des zweiten Eigenwertes von $Au = \lambda u$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$, dass $(L(u_1-u_2),u_1-u_2) \geqq (\lambda_2-\lambda_1)\|u_1-u_2\|_H^2$.

Zusammengefasst erhalten wir damit, dass $0 \geqq \varepsilon\|u_1-u_2\|_H^2$, also $u_1 = u_2$.

q.e.d.

3. Die Gleichung im Kern von L und ein Existenzsatz

Sei nun $f \in H$. Dann ist f sicher in V^* bezüglich

$$(f,v)_V = \int_\Omega f(x)v(x)dx$$

Satz 3.1

Die Abbildung $\Gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch:

$\Gamma(t) := \int_\Omega g(tv_1+ u_t)v_1 dx$, ist stetig.

u_t ist die zu t gehörende Lösung der Gleichung (1.1).

Beweis: Die Abbildung Γ ist wohldefiniert, da nach Lemma 2.5 zu jedem $t \in \mathbb{R}$ genau ein $u_t \in V_2$ existiert, das Lösung der Gleichung (1.1) ist.

Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen, die in $\mathbb{R}$ gegen ein $t_o \in \mathbb{R}$ konvergiert. Wir werden zeigen, dass

(i) $\quad t_n v_1 + u_{t_n} \longrightarrow t_o v_1 + u_{t_o} \quad$ in V

(ii) $\quad \int_\Omega g(t_n v_1 + u_{t_n})(t_n v_1 + u_{t_n})dx \leqq \text{const.} \quad \forall \; n \in \mathbb{N}.$

Nach dem Lemma 4.1 in [8] folgt dann, dass

$g(t_n v_1 + u_{t_n}) \longrightarrow g(t_o v_1 + u_{t_o})$ in $L^1(\Omega)$ und weil $v_1 \in L^\infty(\Omega)$ hieraus die Behauptung.

Wir setzen $u_n := u_{t_n}$, aus Lemma 2.5 wissen wir, dass

$$(3.1) \qquad (Lu_n, u_n) + \int_\Omega g(t_n v_1 + u_n)u_n dx = \int_\Omega f \cdot u_n dx \quad \forall \; n \in \mathbb{N}.$$

Diese Gleichung dividieren wir durch $\|u_n\|_V$ und wenden die Hölder-Ungleichung auf der rechten Seite an. Damit erhalten wir:

$$\frac{1}{\|u_n\|_V}\left((Lu_n, u_n) + \int_\Omega g(t_n v_1 + u_n)u_n dx \right) \leqq \|f\|_H \leqq \text{const.} \quad \forall \; n.$$

Da die Folge (t_n) beschränkt ist, können wir hieraus wegen der Bemerkung 2.4 schliessen, dass die Folge (u_n) in V beschränkt ist. Weil nun V ein reflexiver Banachraum ist, existiert eine Teilfolge (u_{n_k}) von (u_n) und ein $u \in V$ mit $u_{n_k} \longrightarrow u$ für $k \longrightarrow \infty$.

Damit gilt, dass $t_{n_k} v_1 + u_{n_k} \longrightarrow t_o v_1 + u$ in V und

$$(3.2) \qquad \begin{aligned} &\int_\Omega g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k})u_{n_k} dx = \int_\Omega f \cdot u_{n_k} dx - (Lu_{n_k}, u_{n_k}) \leqq \\ &\leqq \|f\|_H \|u_{n_k}\|_H + \lambda_1 \|u_{n_k}\|_H^2 + a(u_{n_k}, u_{n_k}) \leqq \text{const.} \quad \forall \; k. \end{aligned}$$

Weil $v_1 \in L^\infty(\Omega)$ und die Folge (t_n) in $\mathbb{R}$ beschränkt ist, existiert eine Konstante $c_2 > 0$ mit $|t_{n_k} v_1(x)| \leqq c_2 \quad \forall \; k \in \mathbb{N}$, f.ü. in Ω.

Wir setzen $\quad \Omega_k^1 = \{ x \in \Omega \;/\; |u_{n_k}(x)| > c_o + c_2 \}$

$$\Omega_k^2 = \{ x \in \Omega \;/\; |u_{n_k}(x)| \leqq c_o + c_2 \}.$$

Wegen der Vorzeichenbedingung (g.1) existiert eine Konstante $c_3 > 0$ mit $|(g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k})(x)) \cdot u_{n_k}(x)| \leqq c_3 \quad \forall \; k \in \mathbb{N}$, f.ü. in Ω_k^2 und $(g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k})(x)) \cdot u_{n_k}(x) \geqq 0 \quad \forall \; k \in \mathbb{N}$, f.ü. in Ω_k^1.

Damit haben wir, dass

$$\int_\Omega |g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k}) u_{n_k}| dx = \int_{\Omega_k^1} g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k}) u_{n_k} dx + \tag{3.3}$$
$$+ \int_{\Omega_k^2} |g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k}) u_{n_k}| dx \leqq \int_\Omega g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k}) u_{n_k} dx + 2c_3 \cdot \mu(\Omega) \leqq$$
$$\leqq \text{const.} \quad \forall \; k \quad \text{nach (3.2).}$$

Es ist klar, dass $|(g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k})(x)) \cdot t_{n_k} v_1(x)| \leqq$

$\leqq (g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k})(x)) \cdot u_{n_k}(x) \quad \forall \; k \in \mathbb{N}$, f.ü. in Ω_k^1 und dass eine Konstante $c_4 > 0$ existiert mit

$|(g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k})(x)) \cdot t_{n_k} v_1(x)| \leqq c_4 \quad \forall \; k \in \mathbb{N}$, f.ü. in Ω_k^2.

Zusammen mit (3.3) gilt damit, dass

$$\int_\Omega g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k}) t_{n_k} v_1 dx = \int_{\Omega_k^1} g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k}) t_{n_k} v_1 dx +$$
$$+ \int_{\Omega_k^2} g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k}) t_{n_k} v_1 dx \leqq \int_\Omega |g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k}) u_{n_k}| dx + c_4 \mu(\Omega) \leqq \text{const.}$$

Zusammengefasst erhalten wir, dass

$$t_{n_k} v_1 + u_{n_k} \longrightarrow t_o v_1 + u \quad \text{in } V \text{ für } k \longrightarrow +\infty$$

$$\int_\Omega g(t_{n_k} v_1 + u_{n_k})(t_{n_k} v_1 + u_{n_k}) dx \leqq \text{const.} \quad \forall \; k \in \mathbb{N}.$$

Nach dem schon erwähnten Lemma gilt damit:

$g(t_{n_k}v_1+u_{n_k}) \longrightarrow g(t_o v_1+u)$ in $L^1(\Omega)$. Sei $w \in W_2$, dann gilt

$$(Lu_{n_k},w) + \int_\Omega g(t_{n_k}v_1+u_{n_k})wdx \longrightarrow (Lu,w) + \int_\Omega g(t_o v_1+u)wdx \, .$$

Also $\quad (Lu,w) + \int_\Omega g(t_o v_1+u)wdx = \int_\Omega f\cdot wdx \quad \forall \; w \in W_2$

Die Lösung dieser Gleichung ist aber nach dem Lemma 2.5 eindeutig bestimmt. Hieraus können wir schliessen, dass $u_{t_o} = u$ und dass $t_n v_1 + u_n \longrightarrow t_o v_1 + u_{t_o}$ in V für $n \longrightarrow +\infty$.

Der Satz ist damit bewiesen.

q.e.d.

Im nächsten Lemma schätzen wir das asymptotische Verhalten von Γ ab. Wir führen die Bezeichnungen ein:

$$g_+ := \liminf_{s\to+\infty} g(s) \quad , \quad g_- := \limsup_{s\to-\infty} g(s)$$

Wegen der Vorzeichenbedingung (g.1) gilt, dass $g_+ \geqq 0$, $g_- \leqq 0$.

<u>Lemma</u> 3.2

(i) $\quad \liminf_{t\to+\infty} \Gamma(t) \geqq \int_\Omega g_+ v_1 dx$

(ii) $\quad \limsup_{t\to-\infty} \Gamma(t) \leqq \int_\Omega g_- v_1 dx$

<u>Beweis</u>: Wir unterscheiden zwei Fälle.

(a) $\liminf_{t\to+\infty} \frac{\Gamma(t)}{t} = h > 0$. Dann ist $\liminf_{t\to+\infty} \Gamma(t) = +\infty$ und es ist nichts zu zeigen.

(b) Es existiere eine Folge $(t_n) \subset \mathbb{R}$ mit $t_n \longrightarrow +\infty$ und

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(t_n)}{t_n} \leqq 0 \, .$$

Nach dem Lemma 2.5 gilt, dass

(3.4) $$\int_\Omega f\cdot u_n dx + t_n\Gamma(t_n) = (Lu_n,u_n) + \int_\Omega g(t_nv_1+u_n)(t_nv_1+u_n)dx ,$$

wo u_n die zu t_n gehörende Lösung der Gleichung (1.1) ist. Also

$$t_n\Gamma(t_n) = (Lu_n,u_n) + \int_\Omega g(t_nv_1+u_n)(t_nv_1+u_n)dx - \int_\Omega f\cdot u_n dx \geqq$$

$$\geqq (Lu_n,u_n) + \int_{\Omega_n} g(t_nv_1+u_n)(t_nv_1+u_n)dx - \int_\Omega f\cdot u_n dx \geqq$$

$$\geqq (\lambda_2-\lambda_1)\|u_n\|_H^2 - \text{const.} - \|f\|_H\|u_n\|_H ,$$

wo $\Omega_n = \{ x \in \Omega \ / \ |(t_nv_1+u_n)(x)| \leqq c_o \}$. Damit

$$0 \geqq \lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(t_n)}{t_n} \geqq \liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\|u_n\|_H^2}{t_n^2} - \frac{\|f\|_H\|u_n\|_H}{t_n^2} \right) .$$

Hieraus folgt, dass eine Teilfolge $\left(\frac{u_n}{t_n}\right)$ von $\left(\frac{u_n}{t_n}\right)$, die wir der Einfachheit halber wieder mit $\left(\frac{u_n}{t_n}\right)$ bezeichnen, in H gegen 0 strebt für n gegen $+\infty$. Nach einem möglicherweise weiteren Uebergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass sie auch punktweise fast überall in Ω gegen 0 strebt.

Unter Ausnützung von (3.4) und weil $\frac{(Lu_n,u_n)}{t_n} \geqq (\lambda_2-\lambda_1)\frac{\|u_n\|_H^2}{t_n} \geqq 0$ erhalten wir die Beziehung:

$$\Gamma(t_n) = \frac{(Lu_n,u_n)}{t_n} + \frac{1}{t_n}\int_\Omega g(t_nv_1+u_n)(t_nv_1+u_n)dx - \frac{1}{t_n}\int_\Omega f\cdot u_n dx \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{t_n}\int_\Omega g(t_nv_1+u_n)(t_nv_1+u_n)dx - \|f\|_H \frac{\|u_n\|_H}{t_n} .$$

Weil ja die Folge $\left(\frac{\|u_n\|_H}{t_n}\right)$ gegen Null konvergiert, gilt, dass

(3.5) $$\liminf_{n\to+\infty}\Gamma(t_n) \geqq \liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{t_n}\int_\Omega g(t_nv_1+u_n)(t_nv_1+u_n)dx \right)$$

Wir wählen eine monoton wachsende Folge $(s_n) \subset \mathbb{R}$ mit $s_n > c_o$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $s_n \longrightarrow +\infty$ und $s_n/t_n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow +\infty$.

Wir setzen

$$\Omega_n^1 := \{x \in \Omega \;/\; |(t_n v_1 + u_n)(x)| \leqq c_o\}$$

$$\Omega_n^2 := \{x \in \Omega \;/\; c_o < |(t_n v_1 + u_n)(x)| \leqq s_n\}$$

$$\Omega_n^3 := \{x \in \Omega \;/\; (t_n v_1 + u_n)(x) < -s_n\}$$

$$\Omega_n^4 := \{x \in \Omega \;/\; (t_n v_1 + u_n)(x) > s_n\}.$$

Wir betrachten das Integral $\frac{1}{t_n} \int_\Omega g(t_n v_1 + u_n)(t_n v_1 + u_n)\,dx =$

$$= \frac{1}{t_n} \int_{\Omega_n^1} g(t_n v_1 + u_n)(t_n v_1 + u_n)\,dx + \frac{1}{t_n} \int_{\Omega_n^2} g(t_n v_1 + u_n)(t_n v_1 + u_n)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{t_n} \int_{\Omega_n^3} g(t_n v_1 + u_n)(t_n v_1 + u_n)\,dx + \frac{1}{t_n} \int_{\Omega_n^4} g(t_n v_1 + u_n)(t_n v_1 + u_n)\,dx =$$

$$= I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n} + I_{4,n}\,.$$

Dann gilt: $I_{1,n} \geqq \frac{-\text{const.}}{t_n}$, $\quad I_{2,n} \geqq 0$, $\quad I_{3,n} \geqq 0$ und

$$I_{4,n} \geqq \inf_{s > s_n} g(s) \int_{\Omega_n^4} \left(v_1 + \frac{u_n}{t_n}\right) dx\,.$$

Wir zeigen, dass $\int_{\Omega_n^4} \left(v_1 + \frac{u_n}{t_n}\right) dx \longrightarrow \int_\Omega v_1\,dx$ für $n \longrightarrow +\infty$.

Dazu betrachten wir die Folge $h_n := \left(v_1 + \frac{u_n}{t_n}\right) \cdot \chi_{\Omega_n^4}$,

wo χ_A die charakteristische Funktion einer messbaren Menge $A \subset \Omega$ bezeichnet. $\chi_{\Omega_n^4} \longrightarrow \chi_\Omega$ f.ü. in Ω, weil $v_1 > 0$ f.ü. in Ω, $u_n/t_n \longrightarrow 0$ f.ü. in Ω und $s_n/t_n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow +\infty$.

Ferner gilt:
$$\int_\Omega \left|\frac{u_n}{t_n} \cdot \chi_{\Omega_n^4}\right| dx \leqq \int_\Omega \left|\frac{u_n}{t_n}\right| dx \leqq \frac{\|u_n\|_H}{t_n} \cdot \mu(\Omega)^{1/2} \longrightarrow 0.$$

Somit: $\int\limits_\Omega h_n dx = \int\limits_\Omega v_1 \cdot \chi_{\Omega_n^4} dx + \int\limits_\Omega \frac{u_n}{t_n} \cdot \chi_{\Omega_n^4} dx \longrightarrow \int\limits_\Omega v_1 dx$ für $n \longrightarrow +\infty$.

Ferner ist $\lim\limits_{n\to\infty}(\inf\limits_{s>s_n} g(s)) = \liminf\limits_{s\to+\infty} g(s) = g_+$ und hieraus folgt,

dass $\liminf I_{4,n} \geqq \int\limits_\Omega g_+ v_1 dx$. Zusammen mit (3.5) haben wir

damit gezeigt, dass $\liminf\limits_{n\to+\infty} \Gamma(t_n) \geqq \int\limits_\Omega g_+ v_1 dx$.

Analog zeigt man, dass $\limsup\limits_{t\to-\infty} \Gamma(t) \leqq \int\limits_\Omega g_- v_1 dx$.

q.e.d.

Als erste Schlussfolgerung dieser drei Paragraphen wollen wir einen Existenzsatz formulieren. Wir wissen, dass die einem f aus H zugeordnete Abbildung $\Gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert in Satz 3.1, stetig ist. Aus Satz 2.3, Lemma 3.2 und dem Zwischenwertsatz folgt damit unmittelbar

Theorem 3.3

Sei $f \in H$ mit $\int\limits_\Omega g_- v_1 dx < \int\limits_\Omega f \cdot v_1 dx < \int\limits_\Omega g_+ v_1 dx$.

Dann ist das Randwertproblem (I) schwach lösbar.

4. Existenz von mehreren Lösungen

Für ein spezielleres g wollen wir in diesem Paragraphen die Existenz von mehreren Lösungen für gewisse f aus H beweisen. Wir nehmen an, dass g die folgende Eigenschaft habe.

(g.3) Sei $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ im Nullpunkt stetig differenzierbar mit $g(0) = 0$ und $g'(0) < 0$.

Aus Satz 2.3 wissen wir, dass zu jedem $t \in \mathbb{R}$ genau ein $u_t \in V_2$ mit $g(tv_1 + u_t) \in L^1(\Omega)$ und $g(tv_1 + u_t)u_t \in L^1(\Omega)$ existiert, so dass

(4.1) $$(Lu_t, w) + \int_\Omega g(tv_1 + u_t) w dx = 0 \quad \forall \ w \in W_2 .$$

Lemma 4.1

Die Abbildung $\Gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Gamma(t) = \int_\Omega g(tv_1+u_t)v_1 dx$, wo u_t die zu t gehörende Lösung der Gleichung (4.1) ist, ist im Nullpunkt differenzierbar und es gilt, dass $\Gamma'(0) = g'(0) < 0$.

Beweis: Wir zerlegen den Beweis in zwei Schritte.

Schritt 1: Die Abbildung $t \longmapsto u_t : \mathbb{R} \longrightarrow V_2$ ist im Nullpunkt differenzierbar mit $u_o' = 0$.

Da g im Nullpunkt stetig differenzierbar ist mit $g'(0) < 0$ und $v_1 \in L^\infty(\Omega)$, existiert ein $h_o \in \mathbb{R}$, so dass

$$g'(hv_1(x)) < 0 \quad \forall \ |h| < h_o \ , \text{ f.ü. in } \Omega.$$

Aus Lemma 2.5 wissen wir, dass die Gleichung

$(Lu_h, u_h) + \int_\Omega g(hv_1 + u_h) u_h dx = 0 \quad \forall \ h \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Wir subtrahieren auf beiden Seiten dieser Gleichung $\int_\Omega g(hv_1)u_h dx$. Unter Anwendung der variationellen Charakterisierung des zweiten Eigenwertes von $Au = \lambda u$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und des Mittelwertsatzes, erhalten wir, dass

$$
(4.2) \quad \begin{aligned} -\int_\Omega g(hv_1)u_h dx &= (Lu_h, u_h) + \int_\Omega [g(hv_1+u_h) - g(hv_1)]u_h dx \geqq \\ &\geqq a(u_h,u_h) - \lambda_1 \|u_h\|_H^2 - (\lambda_2-\lambda_1-\varepsilon)\|u_h\|_H^2 \geqq \frac{\varepsilon}{\lambda_2} a(u_h,u_h) \end{aligned}
$$

Die Abbildung $g'(\eta_h(.)): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g'(\eta_h(x))hv_1(x) = g(hv_1(x))$ ist fast überall wohldefiniert, da $v_1 > 0$ f.ü. in Ω und $h \neq 0$. Sie ist ferner messbar, weil $g(hv_1(.))$ und $hv_1(.)$ messbare Funktionen sind. Damit lässt sich die linke Seite der Gleichung (4.2) schreiben:

$$
-\int_\Omega g(hv_1)u_h dx = -\int_\Omega g'(\eta_h(.))\cdot hv_1 \cdot u_h dx \leqq |h|\cdot\|g'(\eta_h(.)v_1\|_H \|u_h\|_H
$$

Zusammen mit (4.2) gilt somit, dass

$$
(4.3) \quad \|g'(\eta_h(.))v_1\|_H \geqq \frac{1}{|h|\,\|u_h\|_H}\cdot\frac{\varepsilon}{\lambda_2}\cdot a(u_h,u_h) \geqq \frac{c}{|h|}\cdot\|u_h\|_V \quad ,
$$

weil $(a(u,u))^{1/2}$ auf V eine zu $\|u\|_V$ aequivalente Norm definiert. Ferner ist $-hv_1(.) \leqq \eta_h(.) \leqq hv_1(.)$ f.ü. in Ω. Also $-(\lambda_2-\lambda_1-\varepsilon) \leqq g'(\eta_h(.)) < 0 \quad \forall\, |h| < h_o$, f.ü. in Ω, weil g in 0 stetig differenzierbar ist. Damit folgt aus der Ungleichung (4.3), dass

$$
\frac{\|u_h\|_V}{|h|} \leqq \text{const.} \qquad \forall\ |h| < h_o .
$$

V ist reflexiver Banachraum und nach dem Lemma von Rellich (vgl. z.B. [6]) kompakt in H eingebettet. Daher existiert eine Folge $\left(\frac{u_{h_n}}{h_n} \right)$, $h_n \longrightarrow 0$, $u_1 \in V_2$ mit $\frac{u_{h_n}}{h_n} \longrightarrow u_1$ in H, f.ü. in Ω.

Wir setzen $u_n := u_{h_n}$. Weil g' in 0 stetig ist, gilt für fast alle $x \in \Omega$, dass $g'(\eta_{h_n}(x)) \longrightarrow g'(0)$ für $h_n \longrightarrow 0$. Da noch $|g'(\eta_{h_n}(x))\cdot v_1(x)| \leqq |\lambda_2-\lambda_1-\varepsilon|\,|v_1(x)| \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$, folgt aus dem Satz von Lebesgue, dass $g'(\eta_{h_n}(.))\cdot v_1 \longrightarrow g'(0)\cdot v_1$ in H. Wegen der Ungleichung (4.2) existiert daher eine Konstante $c > 0$

mit
$$\frac{c\|u_n\|_V^2}{h_n^2} \leqq -\int_\Omega \frac{g(h_n v_1)\cdot u_n}{h_n^2}\,dx = -\int_\Omega g'(\eta_{h_n}(.))\cdot v_1\cdot \frac{u_n}{h_n} dx \longrightarrow$$
$$\longrightarrow -\int_\Omega g'(0)\cdot v_1\cdot u_1 dx = 0 \text{ , weil } v_1 \in H_1 \text{ und } u_1 \in H_2.$$

Wir haben somit, dass $\frac{u_n}{h_n} \longrightarrow 0$ in V für $n \longrightarrow \infty$. Weil dieser Limes eindeutig ist, gilt damit, dass $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u_h}{h} = 0$ in V. Also ist die Abbildung $t \longmapsto u_t : \mathbb{R} \longrightarrow V_2$ im Nullpunkt differenzierbar und $u_o' = 0$.

<u>Schritt</u> 2: $\Gamma'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \int_\Omega \frac{g(hv_1+u_h)v_1}{h}\,dx = \int_\Omega g'(0)v_1^2 dx = g'(0)$.

Da die Gleichung $(Lu_h,u_h) + \int_\Omega g(hv_1+u_h)u_h dx = 0$ erfüllt ist, haben wir nach Schritt 1, dass
$$\int_\Omega \frac{g(hv_1+u_h)u_h}{h^2}\,dx = -\frac{(Lu_h,u_h)}{h^2} \longrightarrow 0 \text{ für } h \longrightarrow 0.$$

Ebenso nach Schritt 1 gilt, dass $\int_\Omega g(hv_1)\cdot\frac{u_h}{h^2}\,dx \longrightarrow 0$ für $h \longrightarrow 0$.

Zusammen also $\int_\Omega \frac{(g(hv_1+u_h)-g(hv_1))u_h}{h^2}\,dx \longrightarrow 0$ für $h \longrightarrow 0$.

Nach dem Mittelwertsatz gilt: $\int_\Omega \frac{(g(hv_1+u_h)-g(hv_1))u_h}{h^2}\,dx =$

$= \int_\Omega g'(\xi_h(.))\cdot\frac{u_h^2}{h^2}\,dx = \int_\Omega (g'(\xi_h(.)))^+\cdot\frac{u_h^2}{h^2}\,dx -$

$- \int_\Omega (g'(\xi_h(.)))^-\cdot\frac{u_h^2}{h^2}\,dx.$ Weil $(\lambda_2-\lambda_1-\varepsilon) \geqq (g'(\xi_h(.)))^- \geqq 0,$

gilt, dass $\int_\Omega (g'(\xi_h(.)))^-\cdot\frac{u_h^2}{h^2}\,dx \longrightarrow 0$ für $h \longrightarrow 0$. Damit aber

auch $\int_\Omega (g'(\xi_h(.)))^+\cdot\frac{u_h^2}{h^2}\,dx \longrightarrow 0$ und schliesslich

(4.4) $\int_\Omega \left|g'(\xi_h(.))\cdot\frac{u_h^2}{h^2}\right|dx \longrightarrow 0$ für $h \longrightarrow 0$.

Wir betrachten $\int_\Omega \frac{g(hv_1+u_h)v_1}{h}\,dx = \int_\Omega \frac{(g(hv_1+u_h)-g(hv_1))hv_1}{h^2}\,dx +$

$+ \int_\Omega \frac{g(hv_1)v_1}{h}\,dx = I_{1,h} + I_{2,h}$.

$I_{2,h}$ hat die Darstellung $I_{2,h} = \int_\Omega g'(\eta_h(.))\cdot v_1^2 dx$ und konvergiert

deshalb gegen $\int_\Omega g'(0)\cdot v_1^2 dx$, falls h gegen Null strebt, weil

$-(\lambda_2-\lambda_1-\varepsilon) \leqq g'(\eta_h(.)) \leqq 0$ für $|h| \leqq h_o$, f.ü. in Ω und

$g'(\eta_h(.)) \longrightarrow g'(0)$ f.ü. in Ω für $h \longrightarrow 0$.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass $I_{1,h}$ gegen Null konvergiert, falls h gegen Null strebt. Dazu setzen wir:

$$\Omega_h^3 := \{x \in \Omega \ / \ \left|\frac{u_h(x)}{h}\right| \leqq v_1(x)\}$$

$$\Omega_h^4 := \{x \in \Omega \ / \ \left|\frac{u_h(x)}{h}\right| > v_1(x)\}.$$

$I_{1,h}$ hat die Darstellung $|I_{1,h}| = |\int_\Omega \frac{g'(\xi_h(.))u_h h v_1}{h^2} dx| \leq$

$$\leq \int_{\Omega_h^3} |g'(\xi_h(.))v_1 \cdot \frac{u_h}{h}| dx + \int_{\Omega_h^4} |g'(\xi_h(.))v_1 \cdot \frac{u_h}{h}| dx = I_{3,h} + I_{4,h}.$$

Falls $|h| < (h_o)/2$, dann ist $-(\lambda_2-\lambda_1-\varepsilon) \leq g'(\xi_h(.)) \leq 0$ f.ü.in Ω_h^3.

Damit: $I_{3,h} \leq |\lambda_2-\lambda_1-\varepsilon| \cdot \| (u_h)/h \|_H \longrightarrow 0$ für $h \longrightarrow 0$.

Für $x \in \Omega_h^4$ gilt: $|(v_1 \cdot \frac{u_h}{h})(x)| < \frac{u_h^2}{h^2}(x)$, also

$$I_{4,h} \leq \int_\Omega |g'(\xi_h(.)) \cdot \frac{u_h^2}{h^2}| dx \longrightarrow 0 \quad \text{für } h \longrightarrow 0, \text{ wegen } (4.4).$$

Somit haben wir gezeigt, dass $I_{1,h}$ gegen Null konvergiert, falls h gegen Null strebt und damit auch, dass

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega \frac{g(hv_1+u_h)v_1}{h} dx = \int_\Omega g'(0)v_1^2 dx = g'(0) < 0 .$$

q.e.d.

Wir setzen $a = \inf\{\Gamma(t) \,/\, t > 0\}$ und $b = \sup\{\Gamma(t) \,/\, t < 0\}$.
Das Lemma 4.1 besagt nun, dass $a < 0$ und $b > 0$. Ferner ist klar, dass $\Gamma(0) = 0$. Wir haben damit folgende Existenzaussage für mehrere Lösungen bewiesen.

Theorem 4.2

Das Randwertproblem (I) besitzt mindestens zwei verschiedene schwache Lösungen, wenn $f \in H_1$ mit $a < \int_\Omega f \cdot v_1 dx < b$.

Es besitzt sogar drei verschiedene schwache Lösungen, wenn $f \in H_1$ mit $\max\{a, \int_\Omega g_- v_1 dx\} < \int_\Omega f \cdot v_1 dx < \min\{b, \int_\Omega g_+ v_1 dx\}$.

5. Die Gleichung $Au - \lambda u + e^u = f$

Sei $\lambda \leqq \lambda_2$. Wir betrachten hier das Randwertproblem

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{aligned} (Au)(x) - \lambda u(x) + e^{u(x)} - 1 &= f(x) & x &\in \Omega \\ u(x) &= 0 & x &\in \partial\Omega \end{aligned}$$

In einer neueren Arbeit von P. Hess und B. Ruf, [10], wird dieses Problem im Falle $f \in L^\infty(\Omega)$ für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ untersucht. Sie benützen, dass für $f \in L^\infty(\Omega)$ eine Lösung von (II) notwendigerweise eine L^∞-Funktion ist. Damit können sie mit Abschneidemethoden arbeiten und ein modifiziertes Problem lösen, bei dem die nichtlineare Funktion nur noch lineares Wachstum hat.

Wir wollen hier den Fall untersuchen, wo f eine L^2-Funktion ist.
Wir definieren eine Funktion $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch:
$g(s) = g_1(s) + g_2(s)$, wo $g_1(s) = (\lambda_1 - \lambda)s$ und $g_2(s) = e^s - 1$ ist.
Das Problem (II) ist dann aequivalent zu

$$(\mathrm{II}') \quad \begin{aligned} (Au)(x) - \lambda_1 u(x) + g(u(x)) &= f(x) & x &\in \Omega \\ u(x) &= 0 & x &\in \partial\Omega \end{aligned}$$

Im Falle $\lambda \leqq \lambda_1$ sind alle Voraussetzungen aus dem ersten Paragraphen erfüllt.

Sei nun $\lambda_1 < \lambda \leqq \lambda_2$. Wir wollen zeigen, dass die Resultate aus dem zweiten Paragraphen auch in diesem Falle gültig sind.
Die Notationen seien dieselben wie bisher.

Die Funktion g erfüllt die Vorzeichenbedingung (g.1) nicht.
Sie hat aber trotzdem die folgende Eigenschaft, die beim

Beweis der Proposition 2.1 entscheidend war.

Lemma 5.1

Sei $(w_n) \subset W$ mit $w_n \longrightarrow v$ in V und $\int_\Omega g(w_n)w_n dx \leqq \text{const.} \quad \forall \ n.$

Dann ist $g(v) \in L^1(\Omega)$, $g(v)v \in L^1(\Omega)$ und

$g(w_n) \longrightarrow g(v)$ in $L^1(\Omega)$ für $n \longrightarrow \infty$.

Beweis: Die Richtigkeit dieser Aussage ist leicht einzusehen, da $g(s) = g_1(s) + g_2(s)$. g_1 ist linear, also $g_1(w_n) \longrightarrow g_1(v)$ in H, weil V kompakt in H eingebettet ist. Somit

$\int_\Omega g_2(w_n)w_n dx = \int_\Omega g(w_n)w_n dx - \int_\Omega g_1(w_n)w_n dx \leqq \text{const.} \quad \forall \ n.$

g_2 erfüllt die Vorzeichenbedingung $g_2(s)s \geqq 0 \quad \forall \ s \in \mathbb{R}$.

Nach dem Lemma 4.1 aus [8] folgt hieraus die Behauptung.

q.e.d.

Um die Resultate aus dem zweiten Paragraphen anwenden zu können, brauchen wir noch, dass die Abbildung $T: V \supset D(T) \longrightarrow W^*$ koerzitiv ist auf V_2.

Lemma 5.2

$$\frac{(Tw,w)}{\|w\|_V} \longrightarrow +\infty \quad \text{für } \|w\|_V \longrightarrow +\infty, \quad w \in W_2 .$$

Beweis: Wir zeigen dies indirekt.

Annahme: Es existiere eine Konstante $K > 0$ und eine Folge

$(w_n) \subset W_2$ mit $\|w_n\|_V \longrightarrow +\infty$ für $n \longrightarrow \infty$, so dass

$(Tw_n, w_n) \leqq K\|w_n\|_V \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$

$$(Tw_n,w_n) = a(w_n,w_n)_H - \lambda_1(w_n,w_n)_H + \int_\Omega g(tv_1+w_n)w_n dx =$$

$$= a(w_n,w_n) - \lambda(w_n,w_n)_H + \int_\Omega (e^{tv_1+w_n}-1)w_n dx \leqq K\|w_n\|_V \quad \forall\ n.$$

Weil $tv_1 \in L^\infty(\Omega)$ gilt: $\int_\Omega (e^{tv_1+w_n}-1)w_n dx \geqq -\text{const.} \quad \forall\ n.$

Ferner ist $a(w_n,w_n) \geqq \lambda_2\|w_n\|_H^2$,also $-\lambda\|w_n\|_H^2 \geqq -\frac{\lambda}{\lambda_2} a(w_n,w_n)$.

Für $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ gilt damit: $a(w_n,w_n)\cdot(1-\frac{\lambda}{\lambda_2}) - \text{const.} \leqq$

$$\leqq a(w_n,w_n) - \lambda(w_n,w_n)_H + \int_\Omega (e^{tv_1+w_n}-1)w_n dx \leqq K\|w_n\|_V \quad \forall\ n.$$

Wir dividieren durch $\|w_n\|_V^2$ und erhalten, weil $(a(v,v))^{1/2}$ in V eine zu $\|v\|_V$ aequivalente Norm definiert, dass

$$0 < \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\|w_n\|_V^2}[a(w_n,w_n)(1-\frac{\lambda}{\lambda_2}) - \text{const.}]\right) \leqq \limsup_{n\to\infty} \frac{K}{\|w_n\|_V} = 0.$$

Dieser Widerspruch zeigt uns die Richtigkeit von Lemma 5.2 im Falle $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

Sei nun $\lambda = \lambda_2$. Wir zerlegen H_2 in eine direkte Summe von zwei Unterräumen, nämlich $H_2' = N(L-\lambda_2)$ und $H_2'' = N(L-\lambda_2)^\perp \cap H_2$ und setzen $V_2' = V_2 \cap H_2'$, $V_2'' = V_2 \cap H_2''$. Jedes w_n hat somit die eindeutige Darstellung $w_n = w_n' + w_n''$ mit $w_n' \in V_2'$ und $w_n'' \in V_2''$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) Die Folge $\left(\frac{\|w_n''\|_V}{\|w_n\|_V}\right)$ konvergiert nicht gegen Null.

Es gilt:

$$(Tw_n,w_n) = a(w_n'',w_n'') - \lambda_2(w_n'',w_n'')_H + \int_\Omega (e^{tv_1+w_n}-1)w_n dx \leqq K\|w_n\|_V .$$

Unter Ausnützung der variationellen Charakterisierung des dritten Eigenwertes, $a(w_n'',w_n'') \geqq \lambda_3 \|w_n''\|_H^2$, und weil $\int_\Omega (e^{tv_1+w_n}-1)w_n dx \geqq -\text{const.} \quad \forall\ n$ erhalten wir, dass

$$\frac{1}{\|w_n\|_V^2}(a(w_n'',w_n'')(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}) - \text{const.}) \leqq \frac{K}{\|w_n\|_V} \qquad \forall \ n.$$

Somit gilt wegen der Annahme (i) und weil $(a(v,v))^{1/2}$ in V eine zu $\|v\|_V$ aequivalente Norm definiert, dass

$$0 < \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\|w_n\|_V^2}[a(w_n'',w_n'')(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}) - \text{const}]\right) \leqq \limsup_{n\to\infty} \frac{K}{\|w_n\|_V} = 0.$$

Wegen diesem Widerspruch müssen wir nur noch den Fall betrachten, wo

(ii) $$\frac{\|w_n''\|_V}{\|w_n\|_V} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Die Folge $\left(\frac{\|w_n'\|_V}{\|w_n\|_V}\right)$ konvergiert gegen 1 und V_2' ist ein endlichdimensionaler Unterraum von V. Somit existiert eine Teilfolge $\left(\frac{w_n}{\|w_n\|_V}\right)$ und ein $u \in V_2'$ derart, dass

$\frac{w_n}{\|w_n\|_V} \longrightarrow u$ in V, f.ü. in Ω. Der Einfachheit halber ändern wir die Indizes nicht beim Uebergang zu einer Teilfolge.

Wir haben, dass

$$\frac{1}{\|w_n\|_V^2}\int_\Omega (e^{tv_1+w_n}-1)w_n dx \leqq \frac{K}{\|w_n\|_V} - \frac{1}{\|w_n\|_V^2}(a(w_n'',w_n'') - \lambda_2 (w_n'',w_n'')_H)$$

und somit

(5.1) $$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\|w_n\|_V^2}\int_\Omega (e^{tv_1+w_n}-1)w_n dx\right) \leqq 0 .$$

Sei $K_1 > 0$ eine Konstante, so dass $|tv_1| < K_1$ f.ü. in Ω. Es ist $e^s - 1 \geqq s \quad \forall\ s \geqq 0$. Wir setzen

$\Omega_n^1 := \{x \in \Omega \ / \ |w_n(x)| \leqq K_1\}$, $\quad \Omega_n^2 := \{x \in \Omega \ / \ w_n(x) < -K_1\}$,

$\Omega_n^3 := \{x \in \Omega \ / \ w_n(x) > K_1\}$,

$$\frac{1}{\|w_n\|_V^2} \int_\Omega (e^{tv_1+w_n}-1)w_n dx = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{\|w_n\|_V^2} \int_{\Omega_n^i} (e^{tv_1+w_n}-1)w_n dx\right) =$$

$= I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n}$. Es ist klar, dass $\lim_{n\to\infty} I_{1,n} = \lim_{n\to\infty} I_{2,n} = 0$.

$$I_{3,n} = \frac{1}{\|w_n\|_V^2} \int_{\Omega_n^3} (e^{tv_1+w_n}-1)w_n dx \geqq \frac{1}{\|w_n\|_V^2} \int_{\Omega_n^3} (tv_1+w_n)w_n dx =$$

$$= \frac{1}{\|w_n\|_V^2} \int_{\Omega_n^3} tv_1 \cdot w_n dx + \frac{1}{\|w_n\|_V^2} \int_{\Omega_n^3} w_n^2 dx .$$

Dass das erste Integral gegen Null strebt für n gegen ∞, ist leicht einzusehen. Ferner gilt, dass

$$\frac{1}{\|w_n\|_V^2} \int_{\Omega_n^3} w_n^2 dx = \frac{1}{\|w_n\|_V^2} \int_\Omega w_n^2 \cdot \chi_{\Omega_n^3}\, dx \longrightarrow \int_\Omega u^2 \cdot \chi_{\Omega_3} dx \quad \text{für } n \longrightarrow \infty,$$

wo $\Omega_3 = \{x \in \Omega \ / \ u(x) > 0\}$. Die Richtigkeit dieser Aussage

folgt sofort aus: $\dfrac{K_1}{\|w_n\|_V} \longrightarrow 0$ und $\dfrac{w_n}{\|w_n\|_V} \longrightarrow u$ in H, f.ü. in Ω.

Weil $u \in V_2$, also im L^2-Orthogonalkomplement von $N(L-\lambda_1)$ liegt, wechselt u das Vorzeichen. Hieraus können wir schliessen, dass

$\int_\Omega u^2 \cdot \chi_{\Omega_3} dx > 0$. Zusammengefasst erhalten wir, dass

$\limsup_{n\to\infty} \dfrac{1}{\|w_n\|_V^2} \int_\Omega (e^{tv_1+w_n}-1)w_n dx > 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zu (5.1). Also ist die Annahme falsch.

q.e.d.

Bemerkung 5.3: Aus dem Beweis von Lemma 5.2 ist sofort ersichtlich, dass wir folgendes gezeigt haben:

$$\frac{a(w,w)}{\|w\|_V} - \frac{\lambda(w,w)_H}{\|w\|_V} + \frac{1}{\|w\|_V}\int_\Omega (e^{tv_1+w}-1)w\,dx \longrightarrow +\infty$$

für $\|w\|_V \longrightarrow +\infty$, $w \in W_2$, gleichmässig in t für $|t| \leqq$ const.

Wir können nun ein dem Satz 2.3 analoges Resultat festhalten.

Satz 5.4

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Für alle $f \in V^*$ existiert ein $u \in V_2$, $u = u(t,f)$, so dass $g(tv_1 + u) \in L^1(\Omega)$, $g(tv_1 + u)u \in L^1(\Omega)$ und

$$(5.2) \qquad (Lu,w) + \int_\Omega g(tv_1+u)w\,dx = (f,w) \quad \forall \; w \in W_2 \; .$$

Diese Lösung ist eindeutig und es gilt:

$$(Lu,u) + \int_\Omega g(tv_1+u)u\,dx = (f,u) \; .$$

Beweis: Die Existenz der Lösung folgt sofort aus den Lemmata 5.1 und 5.2 sowie den Resultaten aus dem zweiten Paragraphen. Die Richtigkeit der Gleichung $(Lu,u) + \int_\Omega g(tv_1+u)u\,dx = (f,u)$ zeigt man analog wie im Lemma 2.5. Es bleibt also nur noch die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen. Im Fall, dass $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ geht der Beweis gleich wie im Lemma 2.5.

Sei nun $\lambda = \lambda_2$. Es seien u_1 und u_2 aus $D(T) \cap V_2$ mit

$$a(u_1,w) - \lambda_2(u_1,w)_H + \int_\Omega (e^{tv_1+u_1}-1)w\,dx = (f,w) \quad \forall \; w \in W_2$$

$$a(u_2,w) - \lambda_2(u_2,w)_H + \int_\Omega (e^{tv_1+u_2}-1)w\,dx = (f,w) \quad \forall \; w \in W_2 \; .$$

Wir subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten:

(5.3) $a(u_1-u_2,w) - \lambda_2(u_1-u_2,w)_H + \int_\Omega (e^{tv_1+u_1}-e^{tv_1+u_2})w\,dx = 0 \quad \forall\ w \in W_2.$

Sei $(u_1-u_2)^M$, $M > 0$, die abgeschnittene Funktion. Sie hat die Darstellung $(u_1-u_2)^M = P_1((u_1-u_2)^M) + P_2((u_1-u_2)^M)$, wo P_1 bzw. P_2 die L^2-Orthogonalprojektion von H auf H_1 bzw. H_2 ist. Es gilt wie im zweiten Paragraphen, dass $P_2((u_1-u_2)^M) \in W_2$ und

$$a(u_1-u_2,P_2((u_1-u_2)^M)) \longrightarrow a(u_1-u_2,u_1-u_2)$$

$$\lambda_2(u_1-u_2,P_2((u_1-u_2)^M))_H \longrightarrow \lambda_2(u_1-u_2,u_1-u_2)_H$$

$$\int_\Omega (e^{tv_1+u_1}-e^{tv_1+u_2})P_1((u_1-u_2)^M)dx \longrightarrow 0 \qquad \text{für } M \longrightarrow +\infty.$$

Wir setzen $w = P_2((u_1-u_2)^M)$ in (5.3), vollziehen den Grenzübergang $M \longrightarrow +\infty$ und erhalten, dass

$$\limsup_{M\to+\infty}\left(\int_\Omega (e^{tv_1+u_1}-e^{tv_1+u_2})(u_1-u_2)^M dx \right) =$$

$$= -a(u_1-u_2,u_1-u_2) + \lambda_2(u_1-u_2,u_1-u_2)_H \leqq 0.$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $u_1-u_2 \in V_2$. Ferner gilt aber, dass $(e^{tv_1+u_1}-e^{tv_1+u_2})(u_1-u_2)^M \geqq 0$ f.ü. in Ω. Mit Hilfe des Lemmas von Fatou gilt damit: $\int_\Omega (e^{tv_1+u_1}-e^{tv_1+u_2})(u_1-u_2)dx \leqq$

$$\leqq \liminf_{M\to+\infty}\left(\int_\Omega (e^{tv_1+u_1}-e^{tv_1+u_2})(u_1-u_2)^M dx\right) \leqq 0 .$$

Hieraus schliesslich folgt, dass $(e^{tv_1+u_1}-e^{tv_1+u_2})(u_1-u_2) = 0$ f.ü. in Ω und damit, dass $u_1 = u_2$ f.ü. in Ω.

q.e.d.

Wie im dritten Paragraphen zeigt man für $f \in H$ die Stetigkeit von $\Gamma_f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Γ_f ist definiert durch:

$\Gamma_f(t) = \int_\Omega g(tv_1+u_t)v_1 dx$, wo u_t die zu t und f gehörende Lösung der Gleichung (5.2) ist. Das nächste Lemma beschreibt das asymptotische Verhalten von Γ_f für f fest.

Lemma 5.5

Sei $\lambda_1 < \lambda \leqq \lambda_2$. Dann gilt: (i) $\lim_{t\to+\infty} \Gamma(t) = +\infty$

(ii) $\lim_{t\to-\infty} \Gamma(t) = +\infty$

Beweis: Sei $K > 0$ eine Konstante, so dass

$g(s) = (\lambda_1-\lambda)s + e^s - 1 \geqq s \quad \forall \quad s > K$. Wir setzen

$\Omega_t^1 := \{x \in \Omega \ / \ (tv_1+u_t)(x) > K\}$, $\Omega_t^2 := \{x \in \Omega \ / \ (tv_1+u_t)(x) \leqq K\}$.

Weil $v_1 > 0$ f.ü. in Ω gilt, dass $\Gamma(t) = \int_\Omega g(tv_1+u_t)v_1 dx =$

$= \int_{\Omega_t^1} g(tv_1+u_t)v_1 dx + \int_{\Omega_t^2} g(tv_1+u_t)v_1 dx \geqq \int_{\Omega_t^1} (tv_1+u_t)v_1 dx$ - const.

Dass die rechte Seite der Ungleichung und damit auch $\Gamma(t)$ gegen $+\infty$ strebt, wenn t gegen $+\infty$ strebt, ist sofort einzusehen, weil

$t = \int_\Omega (tv_1+u_t)v_1 dx = \int_{\Omega_t^1} (tv_1+u_t)v_1 dx + \int_{\Omega_t^2} (tv_1+u_t)v_1 dx \leqq$

$\leqq \int_{\Omega_t^1} (tv_1+u_t)v_1 dx$ + const.

Schliesslich gilt noch, dass $\Gamma(t) = \int_\Omega (\lambda_1-\lambda)(tv_1+u_t)v_1 dx$ +

$+ \int_\Omega (e^{tv_1+u_t}-1)v_1 dx \geqq (\lambda_1-\lambda)t$ - const. $\longrightarrow +\infty$ für $t \longrightarrow -\infty$,

da $\lambda_1-\lambda < 0$.

q.e.d.

Weil $\Gamma_{f_2}(t)$ für jedes $f_2 \in H_2$ stetig ist und $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \Gamma_{f_2}(t) = +\infty$ gilt der folgende Satz.

<u>Satz 5.6</u>

Zu jedem $f_2 \in H_2$ existiert eine Konstante $c = c(f_2) \in \mathbb{R}$, so dass für $f = sv_1 + f_2$ gilt:

(i) (II') hat mindestens <u>zwei</u> verschiedene schwache Lösungen, wenn $s > c$.

(ii) (II') hat mindestene <u>eine</u> schwache lösung, wenn $s = c$.

(iii) (II') hat <u>keine</u> Lösung, wenn $s < c$.

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir noch zeigen,dass die Menge der f aus H, für die (II') schwach lösbar ist, in H abgeschlossen ist.

<u>Satz 5.7</u>

Die Menge $\{f \in H \,/\, \exists\ v \in V$ schwache Lösung von (II')$\}$ ist in H abgeschlossen.

<u>Beweis</u>: Seien $(f_n) \subset H$, $f \in H$ und $(v_n) \subset V$, so dass (f_n) in H gegen f konvergiert und v_n die zu f_n gehörende schwache Lösung von (II') ist, d.h. $(Lv_n,w) + \int_\Omega g(v_n)w\,dx = \int_\Omega f_n w\,dx \quad \forall\ w \in W$.
Jedes v_n hat die eindeutige Darstellung $v_n = t_n v_1 + u_n$, $t_n \in \mathbb{R}$, $u_n \in V_2$. Man sieht leicht, dass die (t_n) in $\mathbb{R}$ beschränkt sind. Sonst könnte man wie im Beweis des Lemmas 5.5 schliessen, dass $\int_\Omega f_n v_1 dx = \int_\Omega g(t_n v_1 + u_n) v_1 dx$ in $\mathbb{R}$ unbeschränkt wäre. Dies wäre aber ein Widerspruch zur Konvergenz der Folge (f_n) in H.

Wie im Beweis der Stetigkeit von $\Gamma_f(t)$ zeigt man dann, dass auch die Folge (u_n) in V beschränkt ist. Wegen der Reflexivität von V existiert damit eine Teilfolge (v_n) von (v_n) derart, dass $v_n \rightharpoonup v$ in V und folgende Eigenschaft erfüllt ist:

$\int_\Omega g(v_n)v_n dx \leqq$ const. $\forall \; n \in \mathbb{N}$.

Nach dem Lemma 5.1 gilt somit, dass $g(v) \in L^1(\Omega)$, $g(v)v \in L^1(\Omega)$ und $g(v_n) \longrightarrow g(v)$ in $L^1(\Omega)$. Für $w \in W$ können wir damit den Grenzübergang in der Gleichung $(Lv_n,w) + \int_\Omega g(v_n)wdx = \int_\Omega f_n wdx$ machen. Hieraus folgt nun, dass

$$(Lv,w) + \int_\Omega g(v)wdx = \int_\Omega fvdx \quad \forall \; w \in W .$$

q.e.d.

II. Zur Frage der Abgeschlossenheit der Wertemenge bei beschränkten nichtlinearen Störungen

1. Eine hinreichende Bedingung für die Abgeschlossenheit

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ wiederum ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$. Wir betrachten die nichtlineare Gleichung

(1.1) $$Lu + G(u) = f$$

im reellen Hilbertraum $H = L^2(\Omega)$ und untersuchen, wann das Bild $R(L+G)$ in H abgeschlossen ist. P. Hess hat in einer Arbeit,[9], hinreichende Bedingungen für die Abgeschlossenheit des Bildes in H angegeben. Im ersten Paragraphen wollen wir einen direkten Beweis für dieses Resultat formulieren. Im zweiten Paragraphen geben wir dann Beispiele an, die zeigen, dass diese Bedingungen "fast notwendig" sind.

$L: H \supset D(L) \longrightarrow H$ sei ein linearer Operator mit dichtem Definitionsbereich und kompakter Resolvente. Ferner sei der Kern von L, $N(L)$, nichttrivial und $N(L) = N(L^*)$, wo L^* der adjungierte Operator von L ist.

G bezeichnet den Nemytskii-Operator, der der stetigen Funktion $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zugeordnet ist. Wir nehmen an, dass g eine beschränkte Funktion ist und dass die Limites $g_+ = \lim_{s\to+\infty} g(s)$ und $g_- = \lim_{s\to-\infty} g(s)$ existieren. Weiter können wir o.B.d.A. annehmen, dass $g_- \leqq 0 \leqq g_+$. Ansonsten addieren wir eine Konstante zu g oder betrachten $-L$.

Somit ist G eine stetige Abbildung von H nach H und hat ein beschränktes Bild. Wir nehmen an, dass g folgende Bedingung erfüllt.

(g.1) Es existiere eine Konstante $s_o > 0$, so dass

$$g(s) \geqq g_+ \quad \forall \ s \geqq s_o$$

$$g(s) \leqq g_- \quad \forall \ s \leqq -s_o \ .$$

Ferner wollen wir voraussetzen, dass die Eigenfunktionen von L bezüglich dem Eigenwert Null die unique continuation property erfüllen:

(UCP) Sei $u \in N(L)$ mit $\mu(\Omega_o) > 0$, wo $\Omega_o = \{x \in \Omega \ / \ u(x) = 0\}$ und μ das N-dimensionale Lebesguemass ist.

Dann ist $u = 0$ f.ü. in Ω.

Der Hilbertraum H hat die Darstellung $H = N(L) \oplus R(L)$. Wir bezeichnen $H_1 = N(L)$ und $H_2 = R(L)$, P_1 bzw. P_2 sei die Orthogonalprojektion von H auf H_1 bzw. H_2 . Weil L eine kompakte Resolvente besitzt ist H_1 ein endlichdimensionaler Unterraum von H. Wir führen noch die folgenden Symbole ein:

$$\delta_+ = \liminf_{s \to +\infty} (g(s)-g_+)s \ , \qquad \delta_- = \liminf_{s \to -\infty} (g(s)-g_-)s$$

<u>Satz 1.1</u>

(1) Die Funktionen aus N(L) wechseln das Vorzeichen nicht. Wenn $\delta_+ > 0$ <u>und</u> $\delta_- > 0$, dann ist R(L+G) in H abgeschlossen.

(2) Die Funktionen aus N(L) wechseln das Vorzeichen. Wenn $\delta_+ > 0$ <u>oder</u> $\delta_- > 0$, dann ist R(L+G) in H abgeschlossen.

Beweis: Da L ein Operator mit kompakter Resolvente ist, besteht das Spektrum von L aus isolierten Eigenwerten (vgl. z.B. Theorem 6.29 in [11]). Somit ist der Operator $L + \frac{1}{n}P_1 : H \longrightarrow H$ invertierbar für alle n aus $\mathbb{N}$ und das Inverse ist ein kompakter Operator. Weil für $f \in H$ die Bildmenge von $(L + \frac{1}{n}P_1)^{-1} \cdot (G-f)$ in H beschränkt ist, existiert nach dem Fixpunktsatz von Schauder (vgl. z.B. [14]) zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in D(L)$, so dass

$$(1.2)_n \qquad Lu_n + \frac{1}{n}P_1 u_n + G(u_n) = f \; .$$

Sei nun $f \in H$ derart, dass

$$(1.3) \qquad \int_\Omega f \cdot w\,dx \leqq \int_\Omega (g_+ w^+ - g_- w^-)\,dx \qquad \forall \quad w \in H_1 \; .$$

w^+ bzw. w^- bezeichnet den positiven bzw. negativen Teil der Funktion w, d.h. $w = w^+ - w^-$.

Beh.1: Zu jedem $f \in H$, das (1.3) genügt, existiert ein $u \in D(L)$, so dass $Lu + G(u) = f$.

Wir wissen, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in D(L)$ existiert, das Lösung von $(1.2)_n$ ist. Wir wenden die Projektion P_2 auf diese Gleichung an und erhalten, dass $L(P_2 u_n) = P_2 f - P_2(G(u_n))$. Weil das Inverse der Restriktion von L auf $D(L) \cap H_2$ ein kompakter Operator von H_2 nach H_2 ist und $P_2 f - P_2(G(u_n))$ in H_2 beschränkt ist, folgt, dass die Folge $(P_2 u_n)$ in H_2 relativ-kompakt ist. Somit existiert eine Teilfolge von $(P_2 u_n)$, die wir der Einfachheit halber wieder mit $(P_2 u_n)$ bezeichnen, und ein $z \in H_2$ derart, dass $(P_2 u_n)$ gegen z in H und punktweise fast überall in Ω konvergiert. Ferner existiert eine weitere Teilfolge von $(P_2 u_n)$ und ein $y \in H$, so dass

$$(1.4) \qquad |(P_2 u_n)(x)| \leqq y(x) \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}, \text{ f.ü. in } \Omega.$$

Beim Beweis der Vollständigkeit der $L^p(\Omega)$-Räume $(1 \leqq p < \infty)$ wird von dieser Tatsache üblicherweise Gebrauch gemacht (vgl. [3]).

Als nächstes zeigen wir, dass auch die Folge (P_1u_n) in H relativ-kompakt ist. Wir zeigen dies indirekt und nehmen dazu an, dass die Folge (P_1u_n) unbeschränkt sei. Wir setzen $\lambda_n w_n = P_1u_n$ mit $\lambda_n = \|P_1u_n\|_H$, $\|w_n\|_H = 1$ und multiplizieren die Gleichung $(1.2)_n$ skalar mit $\lambda_n w_n$:

$\frac{1}{n} \lambda_n^2 \|w_n\|_H^2 + \int_\Omega g(u_n)\lambda_n w_n dx = \int_\Omega f\lambda_n w_n dx$. Weil f (1.3) erfüllt gilt, dass $\int_\Omega g(u_n)\lambda_n w_n dx \leqq \int_\Omega f\lambda_n w_n dx \leqq \int_\Omega (g_+(\lambda_n w_n)^+ - g_-(\lambda_n w_n)^-)dx$.

Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1.5) \qquad \int_\Omega (g(u_n)-g_+)(\lambda_n w_n)^+ dx - \int_\Omega (g(u_n)-g_-)(\lambda_n w_n)^- dx \leqq 0 .$$

Da $\|w_n\| = 1$ für alle n und $\dim H_1 < \infty$, existiert ein $w \in H_1$ und eine geeignete Teilfolge von (w_n), so dass diese Teilfolge in H und punktweise fast überall in Ω gegen w konvergiert. Weil $\|w\| = 1$ folgt aus der (UCP), dass $w \neq 0$ f.ü. in Ω. Ohne die Indizes beim Uebergang zu einer Teilfolge geändert zu haben, gilt damit für die Folge (u_n), wegen (1.4), dass für fast alle $x \in \Omega, u_n(x) \longrightarrow +\infty$ auf der Menge $\{x \in \Omega \,/\, w(x) > 0\}$ und $u_n(x) \longrightarrow -\infty$ auf der Menge $\{x \in \Omega \,/\, w(x) < 0\}$.

Wir betrachten nun folgende Teilgebiete von Ω:

$\Omega_n^1 := \{x \in \Omega \,/\, u_n(x) \geqq s_o + y(x)\}$

$\Omega_n^2 := \{x \in \Omega \,/\, u_n(x) < s_o + y(x)\}$

$\Omega_n^3 := \{x \in \Omega \,/\, u_n(x) \leqq -s_o - y(x)\}$

$\Omega_n^4 := \{x \in \Omega \,/\, u_n(x) > -s_o - y(x)\}$.

Die Integrale auf der linken Seite der Ungleichung (1.5) lassen sich damit wie folgt schreiben:

$$\int_\Omega (g(u_n)-g_+)(\lambda_n w_n)^+ dx \quad - \quad \int_\Omega (g(u_n)-g_-)(\lambda_n w_n)^- dx \quad =$$

$$= \int_{\Omega_n^1} (g(u_n)-g_+)u_n dx \quad - \quad \int_{\Omega_n^1} (g(u_n)-g_+)P_2 u_n dx \quad +$$

$$+ \int_{\Omega_n^2} (g(u_n)-g_+)(\lambda_n w_n)^+ dx + \int_{\Omega_n^3} (g(u_n)-g_-)u_n dx \quad -$$

$$- \int_{\Omega_n^3} (g(u_n)-g_-)P_2 u_n dx \quad - \quad \int_{\Omega_n^4} (g(u_n)-g_-)(\lambda_n w_n)^- dx =$$

$$= I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n} + I_{4,n} + I_{5,n} + I_{6,n} .$$

(i) $I_{1,n} = \int_\Omega (g(u_n)-g_+)u_n \cdot \chi_{\Omega_n^1} dx$

Da der Integrand von $I_{1,n}$ nach der Voraussetzung (g.1) nicht negativ ist, gilt nach dem Lemma von Fatou, dass

$$\liminf_{n\to\infty} I_{1,n} \geqq \int_\Omega \delta_+ \cdot \chi_{\Omega_+} dx = \delta_+ \cdot \mu(\Omega_+) .$$

Analog gilt für $I_{4,n}$, dass

$$\liminf_{n\to\infty} I_{4,n} \geqq \int_\Omega \delta_- \cdot \chi_{\Omega_-} dx = \delta_- \cdot \mu(\Omega_-) .$$

Wo $\Omega_+ = \{x \in \Omega \;/\; w(x) > 0\}$ und $\Omega_- = \{x \in \Omega \;/\; w(x) < 0\}$.

(ii) $I_{2,n} = -\int_\Omega (g(u_n)-g_+)P_2 u_n \cdot \chi_{\Omega_n^1} dx$

$I_{5,n} = -\int_\Omega (g(u_n)-g_-)P_2 u_n \cdot \chi_{\Omega_n^3} dx$

Die Integranden von $I_{2,n}$ und $I_{5,n}$ sind beschränkt durch die L^2-Funktion $(\max_{s\in\mathbb{R}}\{|g(s)|\}) \cdot y(x)$ und konvergieren punktweise fast überall in Ω gegen Null. Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue folgt hieraus, dass $\lim_{n\to\infty} I_{2,n} = \lim_{n\to\infty} I_{5,n} = 0$.

(iii) $I_{3,n} = \int_\Omega (g(u_n)-g_+)(\lambda_n w_n)^+ \cdot \chi_{\Omega_n^2} dx$

$I_{6,n} = \int_\Omega (g(u_n)-g_-)(\lambda_n w_n)^- \cdot \chi_{\Omega_n^4} dx$

Die Integranden von $I_{3,n}$ und $I_{6,n}$ sind beschränkt durch die L^2-Funktion $(\max_{s\in\mathbb{R}}\{|g(s)|\})\cdot(s_o + 2y(x))$ und konvergieren punktweise fast überall gegen Null in Ω. Ebenfalls mit Hilfe des Satzes von Lebesgue folgt dann, dass $\lim_{n\to\infty} I_{3,n} = \lim_{n\to\infty} I_{6,n} = 0$.

Zusammengefasst folgt aus der Ungleichung (1.5), (i), (ii) und (iii), dass

$$0 \geqq \liminf_{n\to\infty}\left(\int_\Omega (g(u_n)-g_+)(\lambda_n w_n)^+ dx - \int_\Omega (g(u_n)-g_-)(\lambda_n w_n)^- dx\right) \geqq$$

$\geqq \delta_+ \cdot \mu(\Omega_+) + \delta_- \cdot \mu(\Omega_-) > 0$ nach den Voraussetzungen, die an δ_+ und δ_- gestellt wurden. Dieser Widerspruch garantiert uns nun die Beschränktheit der Folge $(P_1 u_n)$. Daher existiert eine Teilfolge $(P_1 u_n)$ von $(P_1 u_n)$ und ein $w_o \in H_1$, so dass $(P_1 u_n)$ in H und f.ü. in Ω gegen w_o konvergiert. Eine solche Teilfolge existiert, weil H_1 endlichdimensional ist.

Wir wissen somit, dass die Lösungen (u_n) der Gleichungen $(1.2)_n$ in H gegen $z + w_o$ konvergieren. $(\frac{1}{n} P_1 u_n)$ konvergiert gegen Null, da $(P_1 u_n)$ beschränkt ist. Weil G eine stetige Abbildung ist gilt, dass $G(u_n)$ gegen $G(z+w_o)$ konvergiert und hieraus, dass dann auch (Lu_n) in H konvergiert. Aus der Abgeschlossenheit des Operators L schliesslich folgt, dass (Lu_n) in H gegen $L(z+w_o)$ konvergiert. Damit ist $z + w_o$ Lösung der Gleichung $L(z+w_o) + G(z+w_o) = f$ und die Behauptung 1 gezeigt.

<u>Beh.2</u>: $R(L+G)$ ist in H abgeschlossen.

Sei $(f_n) \subset R(L+G)$ und $f \in H$, so dass (f_n) in H gegen f konvergiert. Wir müssen zeigen, dass f in $R(L+G)$ liegt. Hierfür unterscheiden wir zwei Fälle:

(1) f erfülle die Ungleichung (1.3). Aus der Behauptung 1 wissen wir dann, dass f in $R(L+G)$ liegt.

(2) Es existiere ein $v \in H_1$ derart, dass

(1.6) $$\int_\Omega f \cdot v dx > \int_\Omega (g_+ v^+ - g_- v^-) dx .$$

(u_n) seien Lösungen der Gleichungen

(1.7) $$Lu_n + G(u_n) = f_n .$$

Wir werden wiederum zeigen, dass die Folge (u_n) in H relativ-kompakt ist. Es gilt: $L(P_2 u_n) = P_2 f_n - P_2(G(u_n))$. Hieraus folgt wie im Beweis der Behauptung 1, dass $(P_2 u_n)$ in H relativ-kompakt ist, und dass eine Teilfolge $(P_2 u_n)$ von $(P_2 u_n)$, ein $z \in H_2$ und ein $y \in H$ existieren, so dass $(P_2 u_n)$ in H und f.ü. in Ω gegen z konvergiert und dass $|(P_2 u_n)(x)| \leq y(x)$ für alle n und fast alle $x \in \Omega$.
Unter der Annahme, dass die Folge $(P_1 u_n)$ unbeschränkt ist, setzen wir wie in Beh.1 $\lambda_n w_n = P_1 u_n$ mit $\lambda_n = \|P_1 u_n\|_H$ und $\|w_n\|_H = 1$. Ebenfalls wie vorhin schliessen wir auf die Existenz eines w in H_1 und einer Teilfolge (w_n) von (w_n) derart, dass (w_n) in H und f.ü. in Ω gegen w konvergiert. Somit gilt, dass für fast alle $x \in \Omega$, $u_n(x) \longrightarrow +\infty$ auf der Menge $\{x \in \Omega \,/\, w(x) > 0\}$ und $u_n(x) \longrightarrow -\infty$ auf der Menge $\{x \in \Omega \,/\, w(x) < 0\}$.

Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue können wir nun hieraus schliessen, dass die Integrale $\int_{\Omega_+} g(u_n)vdx$ gegen $\int_{\Omega_+} g_+vdx$ und $\int_{\Omega_-} g(u_n)vdx$ gegen $\int_{\Omega_-} g_-vdx$ konvergieren. Wir multiplizieren die Gleichung (1.7) skalar mit v und erhalten nachdem wir den Grenzübergang vollzogen haben, dass

$$\int_\Omega f\cdot vdx = \int_{\Omega_+} g_+vdx + \int_{\Omega_-} g_-vdx \leqq \int_{\Omega_+} g_+v^+dx - \int_{\Omega_-} g_-v^-dx \leqq \int_\Omega (g_+v^+-g_-v^-)dx.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu (1.6). Daher ist die Folge (P_1u_n) beschränkt und besitzt eine konvergente Teilfolge, die gegen ein $w_o \in H_1$ konvergiert. Aus der Stetigkeit von G und der Abgeschlossenheit von L folgt nun sofort, dass

$L(z+w_o) + G(z+w_o) = f$, d.h. $f \in R(L+G)$.

Der Satz ist damit bewiesen.

q.e.d.

2. Die Bedingung in 1. ist "fast notwendig"

In diesem Paragraphen werden wir Beispiele angeben, die zeigen, dass die Bedingungen, die in 1. an die nichtlineare Funktion g gestellt wurden, "fast notwendig" sind, um die Abgeschlossenheit des Bildes R(L+G) in H zu erhalten.

Wir betrachten zuerst das Beispiel:

$L := -\Delta - \lambda_1 : H \supset D(L) \longrightarrow H, \quad H = L^2(\Omega), D(L) = H_o^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$

$N(L) = \{tv_1 \ / \ t \in \mathbb{R}\}$, $v_1(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$.

Die Funktion g habe folgende Eigenschaften:

$g_- < g_+$, $g(s) \leqq g_+ \quad \forall \quad s \in \mathbb{R}$, es existiere eine Konstante $s_1 < 0$, so dass $g(s) < g_+ \quad \forall \quad s \in (s_1, 0)$.

Da die Funktionen aus N(L) in diesem Beispiel das Vorzeichen nicht wechseln, sind wir im Fall (1) des Satzes 1.1. Die hinreichende Bedingung für die Abgeschlossenheit des Bildes lautet in diesem Fall, dass $\delta_+ > 0$ und $\delta_- > 0$. In unserem Beispiel ist jetzt $\delta_+ \leqq 0$. Es gilt der folgende Satz:

Satz 2.1

Sei $N \geqq 3$, dann ist R(L+G) in H nicht abgeschlossen.

Beweis: Wir werden ein f in H konstruieren, das im Abschluss des Bildes von L+G liegt, aber nicht in R(L+G).

Weil $N \geqq 3$, existiert eine Funktion $w \in D(L) \cap C(\overline{\Omega})$ mit der Eigenschaft, dass $\mu(\{x \in \Omega \,/\, w(x) + tv_1(x) < 0\}) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir werden im Anhang eine Funktion mit diesen Eigenschaften angeben. Aus Regularitätssätzen wissen wir, dass $v_1 \in C(\overline{\Omega})$. Also ist $w + tv_1 \in C(\overline{\Omega}) \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt,

$\mu(\{x \in \Omega \,/\, s_1 < w(x) + tv_1(x) < 0\}) > 0 \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}$.

Nach dem bekannten Theorem von Landesman und Lazer [13] wissen wir, dass $f \in R(L+G)$, wenn $\int_\Omega g_- v_1 dx < \int_\Omega f \cdot v_1 dx < \int_\Omega g_+ v_1 dx$.

Leicht einzusehen ist daher, dass

$$\overline{R(L+G)} \supset \{f \in H \,/\, \int_\Omega g_- v_1 dx \leqq \int_\Omega f \cdot v_1 dx \leqq \int_\Omega g_+ v_1 dx \}.$$

$\overline{R(L+G)}$ bezeichnet den Abschluss der Menge R(L+G) in H.

Wir betrachten $f := Lw + g_+$. f liegt sicher in $\overline{R(L+G)}$, weil $\int_\Omega f\cdot v_1 dx = \int_\Omega g_+ v_1 dx$. Wir nehmen an, dass $f \in R(L+G)$, d.h. es existiere ein $u \in D(L)$, so dass $Lu + G(u) = f$. Diese Gleichung multiplizieren wir skalar mit v_1 und erhalten, dass $\int_\Omega g(u)v_1 dx = \int_\Omega f\cdot v_1 dx = \int_\Omega g_+ v_1 dx$, also $\int_\Omega (g_+ - g(u))v_1 dx = 0$.
Da $g_+ - g(s) \geqq 0 \quad \forall \quad s \in \mathbb{R}$ und $v_1 > 0$ in Ω gilt, dass $G(u) = g_+$ f.ü. in Ω und hieraus, dass $u(x) \in \mathbb{R} \setminus (s_1,0)$ für fast alle $x \in \Omega$. Somit ist $Lu = Lw$ und damit $P_2 u = P_2 w$. Aus den Darstellungen $u = t_o v_1 + P_2 u$ und $w = t_1 v_1 + P_2 w$ erhalten wir, dass $u = (t_o - t_1)v_1 + w$. Nach Konstruktion von w gilt, dass $\mu(\{x \in \Omega \ / \ s_1 < u(x) < 0\}) > 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $u(x) \in \mathbb{R} \setminus (s_1,0)$ für fast alle $x \in \Omega$. Also kann f nicht in $R(L+G)$ liegen.

q.e.d.

Für den Fall, dass $g_- \leqq g(s) \leqq g_+ \quad \forall \quad s \in \mathbb{R}$ und $g_- < g_+$ wollen wir für die Offenheit von $R(L+G)$ in H eine notwendige und hinreichende Bedingung angeben.

Satz 2.2

$R(L+G)$ ist in H genau dann offen, wenn $g_- < g(0) < g_+$.

Beweis: Die Bedingung ist notwendig. Denn wäre z.B. $g(0) = g_+$, dann würde die konstante Funktion $f(x) = g_+ \quad \forall \quad x \in \Omega$ sicher in $R(L+G)$ liegen, da $L(0) + G(0) = G(0) = f$. Ferner gilt aber, dass $f+\varepsilon \notin R(L+G)$ und $f-\varepsilon \in R(L+G)$ für alle $\varepsilon > 0$ genügend klein, weil $g_- \leqq g(s) \leqq g_+ \quad \forall \quad s \in \mathbb{R}$. $R(L+G)$ wäre nicht offen.

Die Bedingung ist hinreichend:

Nach dem schon erwähnten Lemma von Landesman und Lazer gilt ja, dass $\{f \in H \;/\; \int_\Omega g_- v_1 dx < \int_\Omega f \cdot v_1 dx < \int_\Omega g_+ v_1 dx\} \subset R(L+G)$.

Weil $g_- \leqq g(s) \leqq g_+ \quad \forall \quad s \in \mathbb{R}$, gilt für $f \in H$ mit $\int_\Omega f \cdot v_1 dx > \int_\Omega g_+ v_1 dx$ oder $\int_\Omega f \cdot v_1 dx < \int_\Omega g_- v_1 dx$, dass $f \notin \overline{R(L+G)}$.

Somit ist $\{f \in H \;/\; \int_\Omega g_- v_1 dx \leqq \int_\Omega f \cdot v_1 dx \leqq \int_\Omega g_+ v_1 dx\} = \overline{R(L+G)}$.

Es genügt also zu zeigen, dass alle $f \in H$ mit $\int_\Omega f \cdot v_1 dx = \int_\Omega g_+ v_1 dx$ oder $\int_\Omega f \cdot v_1 dx = \int_\Omega g_- v_1 dx$ nicht in $R(L+G)$ liegen.

Wir nehmen an, dass zu einem $f \in H$ mit $\int_\Omega f \cdot v_1 dx = \int_\Omega g_+ v_1 dx$ ein $u \in D(L)$ existiere, so dass $Lu + G(u) = f$. Wir multiplizieren diese Gleichung skalar mit v_1: $\int_\Omega g(u) v_1 dx = \int_\Omega g_+ v_1 dx$.

Also $\int_\Omega (g_+ - g(u)) v_1 dx = 0$. Da $v_1 > 0$ in Ω und $g_+ - g(s) \geqq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt, dass $g(u(x)) = g_+$ für fast alle $x \in \Omega$.

Weil $g_- < g(0) < g_+$ und g stetig ist, existiert ein $s_1 > 0$, so dass $g_- < g(s) < g_+ \quad \forall \quad s \in (-s_1, s_1)$. Also $u(x) \in \mathbb{R} \setminus (-s_1, s_1)$ für fast alle $x \in \Omega$. Dass dies nicht möglich ist, zeigt die folgende Ueberlegung.

<u>Ann</u>: Es existiere ein $u \in H_o^1(\Omega)$ mit $\mu(\{x \in \Omega \;/ |u(x)| < s_1\}) = 0$.
Da $u \in H_o^1(\Omega)$, liegt nach dem Lemma 1.1 in [15] auch $|u|$ in $H_o^1(\Omega)$.
Damit ist $|u| - s_1 \leqq 0$ auf $\partial\Omega$ im Sinne von $H_o^1(\Omega)$ und nach dem Lemma 1.2 in [15] gilt dann, dass $||u| - s_1|^+ \in H_o^1(\Omega)$. Ferner ist $||u| - s_1|^+ = |u| - s_1$. Somit haben wir, dass $|u| \in H_o^1(\Omega)$ und $|u| - s_1 \in H_o^1(\Omega)$. Daher liegt auch die konstante Funktion s_1 in $H_o^1(\Omega)$. Widerspruch.

q.e.d.

<u>Bemerkung</u> 2.3: Die Sätze 2.1 und 2.2 behalten ihre Gültigkeit, wenn man auch maximal monotone Nichtlinearitäten zulässt, d.h. $g: \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ mit $(\xi_1 - \xi_2)(s_1 - s_2) \geqq 0 \quad \forall \quad \xi_1 \in g(s_1)$, $\forall \quad \xi_2 \in g(s_2)$ und es existiert keine echte monotone Erweiterung von g. Die Bedingung $g_- < g(0) < g_+$ bedeutet dann, dass $g_- < \xi < g_+ \quad \forall \quad \xi \in g(0)$.

Im Falle der gewöhnlichen Differentialgleichungen, d.h. $N = 1$, mit $g_- \leqq g(s) \leqq g_+ \quad \forall \quad s \in \mathbb{R}$ und $g_- < g_+$, wobei g stetig oder maximal monoton ist, können wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Abgeschlossenheit von $R(L+G)$ in H angeben.

<u>Satz 2.4</u>

R(L+G) ist in H genau dann abgeschlossen, wenn g maximal monoton ist mit $g(s) = g_+ \quad \forall \quad s > 0$, $g(s) = g_- \quad \forall \quad s < 0$ und $g(0) = [g_-,g_+]$.

<u>Beweis</u>: Die Bedingung ist notwendig:

Ann: g sei nicht maximal monoton.

g ist stetig mit $g_- \leqq g(s) \leqq g_+ \quad \forall \quad s \in \mathbb{R}$. Wir wissen, dass R(L+G) in H offen ist, falls $g_- < g(0) < g_+$, Satz 2.2. Falls $g(0) = g_+$ bzw. $g(0) = g_-$, existiert ein $s_1 > 0$, so dass $g(s) > g_-$ bzw. $g(s) < g_+ \quad \forall \quad s \in (-s_1,s_1)$. Man zeigt wie im Beweis von Satz 2.2, dass $f \notin R(L+G)$ für alle $f \in H$ mit $\int_\Omega f \cdot v_1 dx = \int_\Omega g_- v_1 dx$ bzw. $\int_\Omega f \cdot v_1 dx = \int_\Omega g_+ v_1 dx$. Also ist dann R(L+G) in H sicher nicht abgeschlossen.

Ann: g sei maximal monoton und es existiere ein $s_1 > 0$ mit

$$g(s) < g_+ \quad \forall \quad s < s_1 \text{ bzw. } g(s) > g_- \quad \forall \quad s > -s_1.$$

Wiederum zeigt man wie im Beweis von Satz 2.2, dass

$f \notin R(L+G)$ für alle $f \in H$ mit $\int_\Omega f \cdot v_1 dx = \int_\Omega g_+ v_1 dx$ bzw.

$\int_\Omega f\, v_1 dx = \int_\Omega g_- v_1 dx$.

Die Bedingung ist hinreichend:

Wir müssen zeigen, dass $f \in R(L+G)$ für alle $f \in H$ mit

$\int_\Omega f \cdot v_1 dx = \int_\Omega g_+ v_1 dx$ oder $\int_\Omega f \cdot v_1 dx = \int_\Omega g_- v_1 dx$.

Sei nun $f \in H$ mit $\int_\Omega f \cdot v_1 dx = \int_\Omega g_+ v_1 dx$, der andere Fall geht analog. Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ existiert nach dem Fixpunktsatz von Schauder ein $w_t \in D(L) \cap H_2$, so dass $L(w_t) + P_2(G(tv_1+w_t)) = P_2 f$. Weil $N = 1$, ist $H^2(\Omega)$ kompakt in $C^1(\bar{\Omega})$ eingebettet. Damit sind die $(w_t)_{t\in\mathbb{R}}$ in $C^1(\bar{\Omega})$ beschränkt. Ferner ist $v_1 > 0$ in Ω und $\frac{\partial v_1}{\partial n}(x) \leqq \text{const.} < 0 \quad \forall \quad x \in \partial\Omega$ nach dem Maximumprinzip.

Somit existiert ein $t_o \in \mathbb{R}$, so dass $t_o v_1(x) + w_{t_o}(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$. Weil ja $g(s) = g_+ \quad \forall \quad s > 0$ gilt damit, dass $L(w_{t_o}) + G(t_o v_1 + w_{t_o}) = f$, d.h. $f \in R(L+G)$.

q.e.d.

Zum Schluss geben wir noch ein dem Satz 2.1 analoges Resultat an, falls die Funktionen aus $N(L)$ das Vorzeichen wechseln.

Wir betrachten also das Beispiel:

$$L := -\Delta - \lambda_k : H \supset D(L) \longrightarrow H, \quad D(L) = H_o^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),\ k \geqq 2.$$

Die Funktion g erfülle: $g_- < g_+$ und $g_- \leqq g(s) \leqq g_+ \quad \forall \quad s \in \mathbb{R}$.

Satz 2.5

Sei $N \geq 3$, dann ist $R(L+G)$ in H nicht abgeschlossen.

Beweis: Wir werden wie im Satz 2.1 ein $f \in H$ konstruieren, das in $\overline{R(L+G)}$ liegt, aber nicht in $R(L+G)$.

Da $g_- < g_+$, $g_+ = \sup_{s \in \mathbb{R}} g(s)$ und $g_- = \inf_{s \in \mathbb{R}} g(s)$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass ein $s_1 < 0$ existiert mit $g(s) < g_+ \quad \forall \; s \in (s_1, 0)$.

Wir wählen ein $v_o \in N(L) \setminus \{0\}$ mit $\partial\Omega \cap \partial\Omega_o^+ \neq \emptyset$, wo

$\Omega_o^+ = \{x \in \Omega \,/\, v_o(x) > 0\}$ und $\Omega_o^- = \{x \in \Omega \,/\, v_o(x) < 0$. Dies ist sicher möglich, da die Elemente aus $N(L)$ der unique continuation property genügen.

Sei nun $x_o \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_o^+$. Weil $N \geq 3$, existiert ein

$w \in D(L) \cap C(\overline{\Omega})$, so dass $w \notin C^1(\overline{\Omega})$. Genauer: mit " $\frac{\partial w}{\partial n}(x_o) = +\infty$".

Da $v \in C^1(\overline{\Omega}) \quad \forall \quad v \in N(L)$, gilt dann, dass

$$\mu(\{x \in \Omega \,/\, w(x) + v(x) < 0\} \cap \Omega_o^+) > 0 \quad \forall \quad v \in N(L).$$

Die Existenz von w wird im Anhang gezeigt. Weil $w + v \in C(\overline{\Omega})$ für alle v aus $N(L)$, gilt damit auch, dass

$$\mu(\{x \in \Omega \,/\, s_1 < w(x) + v(x) < 0\} \cap \Omega_o^+) > 0 \quad \forall \quad v \in N(L).$$

Wir betrachten nun die Funktion $f = Lw + g_+ \cdot \chi_{\Omega_o^+} + g_- \cdot \chi_{\Omega_o^-}$.

Es gilt: $\int_\Omega f \cdot v\,dx = g_+ \int_{\Omega_o^+} v\,dx + g_- \int_{\Omega_o^-} v\,dx \leq g_+ \int_{\Omega_o^+} v^+ dx - g_- \int_{\Omega_o^-} v^- dx \leq$

$$\leq \int_\Omega (g_+ v^+ - g_- v^-)\,dx \quad \forall \quad v \in N(L).$$

Weil $(1 - \frac{1}{n}) \int_\Omega f \cdot v\,dx < \int_\Omega (g_+ v^+ - g_- v^-)\,dx \quad \forall \quad v \in N(L) \setminus \{0\}, \; \forall \quad n \in \mathbb{N}$,

liegt f in $\overline{R(L+G)}$, da nach dem Theorem von Landesman-Lazer $(1 - \frac{1}{n}) f \in R(L+G) \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$ und $(1 - \frac{1}{n}) f \longrightarrow f$ in H für $n \longrightarrow +\infty$.

Wir nehmen nun an, dass $f \in R(L+G)$, d.h. es existiert ein $u \in D(L)$, so dass $Lu + G(u) = f$. Wir multiplizieren diese Gleichung mit v_o und erhalten, dass

$\int_\Omega g(u)v_o dx = \int_\Omega f\cdot v_o dx = \int_\Omega (g_+v_o^+ - g_-v_o^-)dx$ und hieraus, dass

$\int_\Omega (g(u)-g_+)v_o^+ dx = \int_\Omega (g(u)-g_-)v_o^- dx$. Weil $((g(u)-g_+)v_o^+)(x) \leqq 0$ und $((g(u)-g_-)v_o^-)(x) \geqq 0$ für fast alle $x \in \Omega$, folgt, dass $(g(u)-g_+)v_o^+ = (g(u)-g_-)v_o^- = 0$ f.ü. in Ω. Hieraus können wir nun schliessen, dass

$$g(u(x)) = g_+ \quad \text{f.ü. in } \Omega_o^+$$
$$g(u(x)) = g_- \quad \text{f.ü. in } \Omega_o^- .$$

Insbesondere also, dass $u(x) \in \mathbb{R} \setminus (s_1,0)$ f.ü. in Ω_o^+, weil $g(s) < g_+ \quad \forall \quad s \in (s_1,0)$.

Weiter gilt, dass $Lu = Lw$, d.h. $P_2u = P_2w$. Aus den Darstellungen $u = v_1 + P_2u$ und $w = v_2 + P_2w$ mit $v_1,v_2 \in N(L)$ folgt damit, dass $u = w + (v_1-v_2)$ und nach der Konstruktion von w schliesslich, dass $\mu(\{x \in \Omega \,/\, s_1 < u(x) < 0\} \cap \Omega_o^+) > 0$.

Dieser Widerspruch garantiert uns nun, dass f nicht in $R(L+G)$ liegen kann, d.h. $R(L+G)$ ist nicht abgeschlossen.

q.e.d.

<u>Bemerkung</u> 2.6: Der Satz 2.5 behält seine Gültigkeit, wenn $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine mehrwertige Abbildung ist, die maximal monoton ist.

Anhang

Wie wir erwähnt haben, wollen wir hier eine Funktion $w \in H_o^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqq 3$, konstruieren mit der Eigenschaft, dass $w \notin C^1(\bar{\Omega})$, genauer, dass " $\frac{\partial w}{\partial n}(x_o) = +\infty$ " für ein $x_o \in \partial\Omega$. $\frac{\partial w}{\partial n}$ bezeichnet die äussere Normalenableitung zum Gebiet Ω.

Zunächst werden wir eine solche Funktion angeben, falls Ω ein Quader ist.

Sei $\Omega = (0,1) \times (-1,1) \times \ldots \times (-1,1)$. Wir setzen

$$w(x) = -(x_1)^{\frac{3}{4}} \cdot \exp\left(- \frac{x_2^2}{x_1^2} - \ldots - \frac{x_N^2}{x_1^2} \right)$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung vom Ursprung und setzen w ausserhalb einer grösseren, geeigneten Umgebung vom Ursprung mit Null fort.

Dass $w \in C(\bar{\Omega})$ und $w/_{\partial\Omega} = 0$ ist klar.

Wir bemerken noch, dass alle partiellen Ableitungen von w bis zur zweiten Ordnung L^2-Funktionen sind:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = -\frac{3}{4}(x_1)^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp(.) - 2(x_1)^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp(.) \cdot \left(\frac{x_2^2}{x_1^2} + \ldots + \frac{x_N^2}{x_1^2} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} = 2(x_1)^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp(.) \cdot \frac{x_2}{x_1} \quad , \ldots\ldots , \quad \frac{\partial w}{\partial x_N} = 2(x_1)^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp(.) \cdot \frac{x_N}{x_1}$$

Diese Funktionen liegen sicher in $L^2(\Omega)$, weil sie jeweils das Produkt einer L^2-Funktion mit einer L^∞-Funktion sind.

Es ist klar, dass " $\frac{\partial w}{\partial n}(0) = +\infty$ ".

Die partiellen Ableitungen der zweiten Ordnung von w sind Summen mit Summanden von der Form:

$$a(x_1)^{-\frac{5}{4}}\exp(.)\cdot\left(\frac{x_2^2}{x_1^2}\right)^{\lambda_2}\cdots\left(\frac{x_N^2}{x_1^2}\right)^{\lambda_N}, \text{ wo } a \in \mathbb{R},\ \lambda_k \geqq 0,\ k = 2,..,N.$$

Mit Hilfe des Satzes von Fubini wollen wir zeigen, dass diese Funktionen in $L^2(\Omega)$ liegen.

$$\int_\Omega \left((x_1)^{-\frac{5}{4}}\exp(.)\cdot\left(\frac{x_2^2}{x_1^2}\right)^{\lambda_2}\cdots\left(\frac{x_N^2}{x_1^2}\right)^{\lambda_N}\right)^2 dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\left(\int_{-1}^1\left(\cdots\left(\int_{-1}^1 (x_1)^{-\frac{10}{4}}(\exp(.))^2\left(\frac{x_2^2}{x_1^2}\right)^{2\lambda_2}\cdots\left(\frac{x_N^2}{x_1^2}\right)^{2\lambda_N}dx_N\right)\cdots\right)dx_1$$

Wir beachten, dass $(\exp(.))^2 = \exp\left(\frac{-2x_2^2}{x_1^2}\right)\cdot\ldots\cdot\exp\left(\frac{-2x_N^2}{x_1^2}\right)$ und

$$\int_{-1}^1 \exp\left(\frac{-2x_N^2}{x_1^2}\right)\cdot\left(\frac{x_N^2}{x_1^2}\right)^{2\lambda_N}dx_N \leqq c_N\left(\int_0^\infty e^{-t}\cdot(t)^{2\lambda_N-\frac{1}{2}}\cdot x_1 dt\right) =$$

$= c_N\cdot x_1\cdot\Gamma(2\lambda_N+\frac{1}{2})$. Wo Γ die bekannte Gamma-Funktion ist. Bei der Abschätzung benutzten wir die Substitution $t = \frac{2x_N^2}{x_1^2}$.

Für $N \geqq 3$ gilt somit:

$$\int_\Omega \left((x_1)^{-\frac{5}{4}}\exp(.)\cdot\left(\frac{x_2^2}{x_1^2}\right)^{\lambda_2}\cdots\left(\frac{x_N^2}{x_1^2}\right)^{\lambda_N}\right)^2 dx \leqq$$

$$\leqq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 (x_1)^{-\frac{10}{4}}\cdot(x_1)^{N-1}\cdot c_2\cdots c_N\cdot\Gamma(2\lambda_2+\tfrac{1}{2})\cdots\Gamma(2\lambda_N+\tfrac{1}{2})dx_1 < +\infty.$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ und sei $x_o \in \partial\Omega$. Es existiert eine Kugel K mit Mittelpunkt x_o und eine Abbildung $T \in C^\infty(\overline{K},\mathbb{R}^N)$ womit die Kugel diffeomorph auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet im Halbraum $\{x \in \mathbb{R}^N \,/\, x_1 > 0\}$ abgebildet wird. Ferner hat die Abbildung T folgende Eigenschaften: $T(\partial\Omega \cap K) \subset \{x \in \mathbb{R}^N \,/\, x_1 = 0\}$

und $T(x_o) = 0$.

Wir setzen dann $\tilde{w}(x) = (w \circ T)(x)$, wo w die Funktion von vorhin ist.

Literaturverzeichnis

[1] Ambrosetti,A. - Mancini,G.: Existence and multiplicity results for nonlinear elliptic problems with linear part at resonance. The case of simple eigenvalue. J. Differential Equations 28(1978), 220-245.

[2] Ambrosetti,A. - Mancini,G.: Theorems of existence and multiplicity for nonlinear elliptic problems with non-invertible linear part. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 5(1978), 15-28.

[3] Bartle,R.G.: The elements of integrations. John Wiley & Sons, New-York 1966.

[4] Brézis,H. - Nirenberg,L.: Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 5(1978), 225-326.

[5] Chicco,M.: Some properties of the first eigenvalue and the first eigenfunction of linear second order elliptic partial differential equations in divergence form. Boll. Un. Mat. Ital. 5(1972), 245-254.

[6] Friedman,A.: Partial differential equations. Holt, Rinehart and Winston 1969.

[7] Hess,P.: On a class of strongly nonlinear elliptic variational inequalities. Math. Ann. 211(1974), 289-297.

[8] Hess,P.: On strongly nonlinear elliptic problems. In "Functional Analysis", Lecture Notes in pure and applied mathematics, Vol. 18, M. Dekker Inc.(1976), 91-109.

[9] Hess,P.: Nonlinear perturbations of linear elliptic and parabolic problems at resonance: existence of multiple solutions.
Erscheint in Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.

[10] Hess,P. - Ruf,B.: On a superlinear elliptic boundary value problem. (Erscheint)

[11] Kato,T.: Perturbations theory for linear operators.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1966.

[12] McKenna,P.J.: On a superlinear elliptic boundary value problem at resonance. (Erscheint)

[13] Landesman,E.M. - Lazer,A.C.: Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance.
J. Math. Mech. 19(1970), 609-623.

[14] Schwartz,J.T.: Nonlinear functional analysis.
Gordon and Breach Science publishers, New-York 1969.

[15] Stampacchia,G.: Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.
Les Presses de l'Université de Montréal, 1966.

[16] Strauss,W.A.: On weak solutions of semi-linear hyperbolic equations.
Ann. Acad. brasil. Cienc. 42(1970), 645-651.